

最難関問題

すべての分数を有限小数で表す

ふつうの小数は各位の数が10になるとくり上がる，10進法で表されています。例えば， $0.24 + 0.38$ は次のように計算します。

$$\begin{array}{r} 0.24 \\ + 0.38 \\ \hline \end{array}$$

0.62 ← 小数第2位は $4 + 8 = 12$ なので，1くり上がり $12 - 10 = 2$ が小数第2位となる

また，小数第1位は10になるとくり上がって整数の1になるので $\frac{1}{10}$ の位，小数第2位は10になる

とくり上がって $\frac{1}{10}$ になるので $\frac{1}{100}$ の位です。

くり上がり方を10進法とは変えて，次のような記数法（数の表し方）を考えます。

- ・ 小数第1，5，9，…位には0～1の整数を用い，2でくり上がる。
- ・ 小数第2，6，10，…位には0～2の整数を用い，3でくり上がる。
- ・ 小数第3，7，11，…位には0～4の整数を用い，5でくり上がる。
- ・ 小数第4，8，12，…位には0～6の整数を用い，7でくり上がる。

(1) この記数法では，小数第1位から小数第5位はそれぞれ何分の1の位になりますか。

(2) この記数法を用いて以下の10進法的小数を表しなさい。

- ① 0.7 ② 0.57

(3) 10進法のある小数Aをこの記数法で表したところ，小数第9位までの小数となりました。小数Aは小数第何位までの小数ですか。

最難関問題

(4) 10進法の小数Bは小数第7位までの小数です。小数Bをこの記数法で表すと、小数第何位の小数になりますか。考えられるものをすべて答えなさい。

(5) この記数法を用いて以下の10進法の割り算の答えを小数で表すとき、小数第何位までの小数になりますか。有限小数で表せないときは、「表せない」と答えなさい。

- ① $6 \div 15$ ② $10 \div 28$ ③ $10 \div 22$ ④ $14 \div 36$ ⑤ $7 \div 480$

(6) この記数法ではどのような割り算の商を有限小数で表すことができますか。

(7) すべての整数 \div 整数の商を有限小数で表す方法を考えなさい。

最難関問題

すべての分数を有限小数で表す

- (1) 小数第1位から順に, $\frac{1}{2}$ の位, $\frac{1}{6}$ の位, $\frac{1}{30}$ の位, $\frac{1}{210}$ の位, $\frac{1}{420}$ の位
(2) ①0.111 ②0.1020111 (3) 小数第3位
(4) 小数第25位, 小数第27位
(5) ①小数第3位 ②小数第4位 ③表せない ④小数第6位 ⑤小数第17位
(6) 商を既約分数で表し, その分母を素因数分解したときに2, 3, 5, 7しか現れない割り算
(7) 解説参照

(1) 10進法と同様に考えると, 以下の様になります。

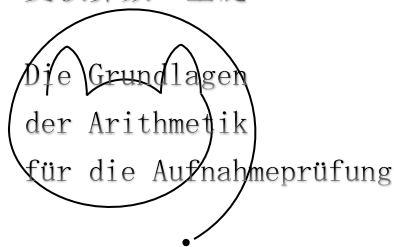
○小数第1位…小数第1位が2になると整数の1になるので, $\frac{1}{2}$ の位です。

○小数第2位… $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ より, $\frac{1}{6}$ の位です。

○小数第3位… $\frac{1}{6} \div 5 = \frac{1}{30}$ より, $\frac{1}{30}$ の位です。

○小数第4位… $\frac{1}{30} \div 7 = \frac{1}{210}$ より, $\frac{1}{210}$ の位です。

○小数第5位… $\frac{1}{210} \div 2 = \frac{1}{420}$ より, $\frac{1}{420}$ の位です。



最難関問題

(2)

① $0.7 = \frac{7}{10}$ より, 分母の $10 = 2 \times 5$ ですから, 小数第3位の $30 = 2 \times 3 \times 5$ の約数となって, 小数

第3位までの小数で表すことができます。 $\frac{7}{10} = \frac{21}{30} = \frac{15 \times 1 + 5 \times 1 + 1 \times 1}{30}$ より, 0.111 です。

② 小数部分は $0.57 = \frac{57}{100}$ より, 分母の $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ ですから, 小数第7位の $2 \times 3 \times 5 \times$

$7 \times 2 \times 3 \times 5 = 6300$ の約数となって, 小数第7位までの小数で表すことができます。 $\frac{57}{100} =$

$\frac{3591}{6300} = \frac{3150 \times 1 + 1050 \times 0 + 210 \times 2 + 30 \times 0 + 15 \times 1 + 5 \times 1 + 1 \times 1}{6300}$ より,

0.1020111 です。

(3) 小数Aは10進法的小数ですから, 分数にすると分母は2と5をいくつかかけ合わせた数となります。

この記数法において小数第9位になるということは, $9 \div 4 = 2$ 余り1より, 2, 3, 5, 7 をかける周期が2回繰り返されて, さらに2を1回かけるということですから, 約分をすると分母が $2 \times 2 \times 2$

に5を0個から2個かけた数になるということです。よって, 10進法では

$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ より, 小数第3位までの小数となります。

(4) 小数Bを既約分数にして分母を素因数分解すると, 少なくとも2か5の一方は7個現れます。5が7

個現れる場合, 5は2, 3, 5, 7の周期の3番目の数ですから, $4 \times 6 + 3 = 27$ より小数第

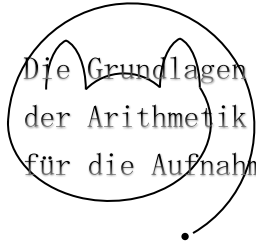
27位になります。また, 5が6個以下で2が7個現れる場合は, 2は周期の2番目の数ですから, $4 \times 6 + 1 = 25$ より小数第25位になります。

最難関問題

(5)

- ① 商を既約分数で表すと $\frac{2}{5}$ です。分母の5は小数第3位の分母30の約数ですから、小数第3位までの小数で表すことができます。
- ② 商を既約分数で表すと $\frac{5}{14}$ です。 $14 = 2 \times 7$ ですから、小数第4位の分母 $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ の約数となります。よって、小数第4位までの小数で表すことができます。
- ③ 商を既約分数で表すと $\frac{5}{11}$ です。素数11は各位の分母を素因数分解しても決して現れません。よって、有限小数で表すことはできません。
- ④ 商を既約分数で表すと $\frac{7}{18}$ です。 $18 = 2 \times 3 \times 3$ ですから、小数第6位の分母 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3$ の約数となります。よって、小数第6位までの小数で表すことができます。
- ⑤ 商を既約分数で表すと $\frac{7}{480}$ です。 $480 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ です。
 $2 \times 3 \times 5 \times 7$ × 2 × …の周期において、2が5個そろうのは、5番目の周期の2がかけられたときです。2は周期の1番目の数ですから、 $4 \times 4 + 1 = 17$ より、小数第17位です。

(6) 解説省略



最難関問題

(7) 考えなければならないのは、位の決め方と、記号（数字）の作り方です。

位の決め方

シンプルなのは、小数第1位から順に $1 \div 2 = \frac{1}{2}$ の位, $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ の位, $\frac{1}{6} \div 4 = \frac{1}{24}$ の位, ... と整数で順に割り算をしていく方法です。この場合、整数の割り算 $M \div N$ の商は、どんなに長くても小数(N-1)の位までの有限小数で表せるはずですが、また、もう少し分母の大きさを抑えるのであれば、2以上の整数の列 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11... を素因数分解して 2, 3, 2×2 , 5, 2×3 , 7, $2 \times 2 \times 2$, 3×3 , 2×5 , 11, ... として、すでに表れている素数の個数を除くと、2, 3, 2, 5, なし, 7, 2, 3, なし, 11... となるので、

$$1 \div 2 = \frac{1}{2} \text{ の位, } \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6} \text{ の位, } \frac{1}{6} \div 2 = \frac{1}{12} \text{ の位, } \frac{1}{12} \div 5 = \frac{1}{60} \text{ の位, } \frac{1}{60} \div 7 = \frac{1}{420} \text{ の位,}$$

$\frac{1}{420} \div 2 = \frac{1}{840}$ の位, $\frac{1}{840} \div 3 = \frac{1}{2520}$ の位, $\frac{1}{2520} \div 11 = \frac{1}{27720}$ の位, ... とすることもできます。他にもいろいろとあると思います。

記号（数字）の決め方

10より大きい素数、例えば11で割り算をしてできる位は、11でくり上がるので、数字が0~9では足りません。10をくり上がりを使わずに表す記号が必要になります。13でくり上がる場合はさらに11と12も必要、... となるので、数字が無限に必要になります。例えば、10は ㊦, 11は ㊦, ... という方法で数字をいくらでも作る規則を決める必要があります。

1つ例を見てみましょう。小数第1位から順に $\frac{1}{2}$ の位, $\frac{1}{6}$ の位, $\frac{1}{12}$ の位, $\frac{1}{60}$ の位, $\frac{1}{420}$ の位, $\frac{1}{840}$ の位, $\frac{1}{2520}$ の位, $\frac{1}{27720}$ の位, ... とした場合、 $10 \div 11 = \frac{10}{11} = \frac{25200}{27720}$ ですから、

$$\frac{25200}{27720} =$$

$$\frac{13860 \times 1 + 4620 \times 2 + 2310 \times 0 + 462 \times 4 + 66 \times 3 + 33 \times 1 + 11 \times 1 + 1 \times 10}{27720}$$

= 0.1204311㊦ となります。