最難関問題

すべての分数を有限小数で表す

ふつうの小数は各位の数が１０になるとくり上がる，１０進法で表されています。例えば，０.２４＋０.３８は次のように計算します。

```
  ０.２４
＋０.３８
―――――
  ０.６２←小数第２位は４＋８＝１２なので，１くり上がり１２－１０＝２が小数第２位となる
```

また，小数第１位は１０になるとくり上がって整数の１になるので$\frac{1}{10}$の位，小数第２位は１０になるとくり上がって$\frac{1}{10}$になるので$\frac{1}{100}$の位です。

くり上がり方を１０進法とは変えて，次のような記数法（数の表し方）を考えます。

・小数第１，５，９，…位には０～１の整数を用い，２でくり上がる。
・小数第２，６，１０，…位には０～２の整数を用い，３でくり上がる。
・小数第３，７，１１，…位には０～４の整数を用い，５でくり上がる。
・小数第４，８，１２，…位には０～６の整数を用い，７でくり上がる。

（１）この記数法では，小数第１位から小数第５位はそれぞれ何分の１の位になりますか。

（２）この記数法を用いて以下の１０進法の小数を表しなさい。

① ０.７　　　② ０.５７

（３）１０進法のある小数Ａをこの記数法で表したところ，小数第９位までの小数となりました。小数Ａは小数第何位までの小数ですか。

最難関問題

（４）１０進法の小数Ｂは小数第７位までの小数です。小数Ｂをこの記数法で表すと，小数第何位の小数になりますか。考えられるものをすべて答えなさい。

（５）この記数法を用いて以下の１０進法の割り算の答えを小数で表すとき，小数第何位までの小数になりますか。有限小数で表せないときは，「表せない」と答えなさい。

①６÷１５　　②１０÷２８　　③１０÷２２　　④１４÷３６　　⑤７÷４８０

（６）この記数法ではどのような割り算の商を有限小数で表すことができますか。

（７）すべての整数÷整数の商を有限小数で表す方法を考えなさい。

最難関問題

すべての分数を有限小数で表す

（１）小数第１位から順に，$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{30}$の位，$\frac{1}{210}$の位，$\frac{1}{420}$の位

（２）①0.１１１　②0.１０２0１１１　　（３）小数第３位

（４）小数第２５位，小数第２７位

（５）①小数第３位　②小数第４位　③表せない　④小数第６位　⑤小数第１７位

（６）商を既約分数で表し，その分母を素因数分解したときに２，３，５，７しか現れない割り算

（７）解説参照

（１）１０進法と同様に考えると，以下の様になります。

○小数第１位…小数第１位が２になると整数の１になるので，$\frac{1}{2}$の位です。

○小数第２位…$\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{6}$より，$\frac{1}{6}$の位です。

○小数第３位…$\frac{1}{6}\div 5=\frac{1}{30}$より，$\frac{1}{30}$の位です。

○小数第４位…$\frac{1}{30}\div 7=\frac{1}{210}$より，$\frac{1}{210}$の位です。

○小数第５位…$\frac{1}{210}\div 2=\frac{1}{420}$より，$\frac{1}{420}$の位です。

最難関問題

（２）

①　０.７＝$\dfrac{7}{10}$より，分母の１０＝２×５ですから，小数第３位の３０＝２×３×５の約数となって，小数第３位までの小数で表すことができます。$\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{30}=\dfrac{15\times1+5\times1+1\times1}{30}$より，０.１１１です。

②　小数部分は０.５７＝$\dfrac{57}{100}$より，分母の１００＝２×２×５×５ですから，小数第７位の２×３×５×７×２×３×５＝６３００の約数となって，小数第７位までの小数で表すことができます。$\dfrac{57}{100}=\dfrac{3591}{6300}=\dfrac{3150\times1+1050\times0+210\times2+30\times0+15\times1+5\times1+1\times1}{30}$より，０.１０２０１１１です。

（３）小数Ａは１０進法の小数ですから，分数にすると分母は２と５をいくつかかけ合わせた数となります。この記数法において小数第９位になるということは，９÷４＝２余り１より，２，３，５，７をかける周期が２回繰り返されて，さらに２を１回かけるということですから，約分をすると分母が２×２×２に５を０個から２個かけた数になるということです。よって，１０進法では１０００＝２×２×２×５×５×５より，小数第３位までの小数となります。

（４）小数Ｂを既約分数にして分母を素因数分解すると，少なくとも２か５の一方は７個現れます。５が７個現れる場合，５は２，３，５，７の周期の３番目の数ですから，４×６＋３＝２７より小数第２７位になります。また，５が６個以下で２が７個現れる場合は，２は周期の２番目の数ですから，４×６＋１＝２５より小数第２５位になります。

最難関問題

（５）

①　商を既約分数で表すと$\frac{2}{5}$です。分母の５は小数第３位の分母３０の約数ですから，小数第３位までの小数で表すことができます。

②　商を既約分数で表すと$\frac{5}{14}$です。１４＝２×７ですから，小数第４位の分母２１０＝２×３×５×７の約数となります。よって，小数第４位までの小数で表すことができます。

③　商を既約分数で表すと$\frac{5}{11}$です。素数１１は各位の分母を素因数分解しても決して現れません。よって，有限小数で表すことはできません。

④　商を既約分数で表すと$\frac{7}{18}$です。１８＝２×３×３ですから，小数第６位の分母２×３×５×７×２×３の約数となります。よって，小数第６位までの小数で表すことができます。

⑤　商を既約分数で表すと$\frac{7}{480}$です。４８０＝２×２×２×２×２×３×５です。
$\boxed{2 \times 3 \times 5 \times 7}$×２×…の周期において，２が５個そろうのは，５番目の周期の２がかけられたときです。２は周期の１番目の数ですから，４×４＋１＝１７より，小数第１７位です。

（６）解説省略

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

（７）考えなければならないのは，位の決め方と，記号（数字）の作り方です。

位の決め方

シンプルなのは，小数第１位から順に１÷２＝$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{2}$÷３＝$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{6}$÷４＝$\frac{1}{24}$の位，…と整数で順に割り算をしていく方法です。この場合，整数の割り算Ｍ÷Ｎの商は，どんなに長くても小数(Ｎ－１)の位までの有限小数で表せるはずです。また，もう少し分母の大きさを抑えるのであれば，２以上の整数の列２，３，４，５，６，７，８，９．１０．１１…を素因数分解して２，３，２×２，５，２×３，７，２×２×２，３×３，２×５，１１，…として，すでに表れている素数の個数を除くと，２，３，２，５，なし，７，２，３，なし，１１…となるので，

１÷２＝$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{2}$÷３＝$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{6}$÷２＝$\frac{1}{12}$の位，$\frac{1}{12}$÷５＝$\frac{1}{60}$の位，$\frac{1}{60}$÷７＝$\frac{1}{420}$の位，$\frac{1}{420}$÷２＝$\frac{1}{840}$の位，$\frac{1}{840}$÷３＝$\frac{1}{2520}$の位，$\frac{1}{2520}$÷１１＝$\frac{1}{27720}$の位，…とすることもできます。他にもいろいろとあると思います。

記号（数字）の決め方

　１０より大きい素数，例えば１１で割り算をしてできる位は，１１でくり上がるので，数字が０～９では足りません。１０をくり上がりを使わずに表す記号が必要になります。１３でくり上がる場合はさらに１１と１２も必要，…となるので，数字が無限に必要になります。例えば，１０は　，１１は　，…という方法で数字をいくらでも作る規則を決める必要があります。

　１つ例を見てみましょう。小数第１位から順に$\frac{1}{2}$の位，$\frac{1}{6}$の位，$\frac{1}{12}$の位，$\frac{1}{60}$の位，$\frac{1}{420}$の位，$\frac{1}{840}$の位，$\frac{1}{2520}$の位，$\frac{1}{27720}$の位，…とした場合，１０÷１１＝$\frac{10}{11}$＝$\frac{25200}{27720}$ですから，

$$\frac{25200}{27720}=\frac{13860\times1+4620\times2+2310\times0+462\times4+66\times3+33\times1+11\times1+1\times10}{27720}$$

＝0.１２０４３１１となります。