受験算数の基礎

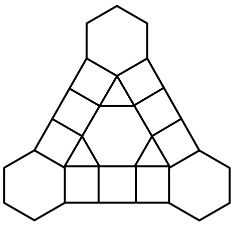
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

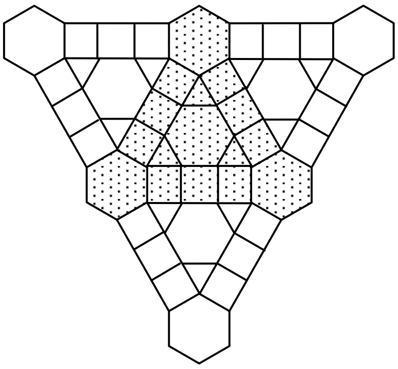
車輪模様のテッセレーション・１

　下の図のように，１辺の長さが１㎝の正三角形，正方形，正六角形を組み合わせて１番目の図形とします。続いて，図形全体が正三角形状の形になるように正三角形，正方形，正六角形を付け加えて２番目，３番目の図形を作っていきます。下の図では見やすさのために，２番目と３番目において１番目の図形にあたる部分に模様をつけています。

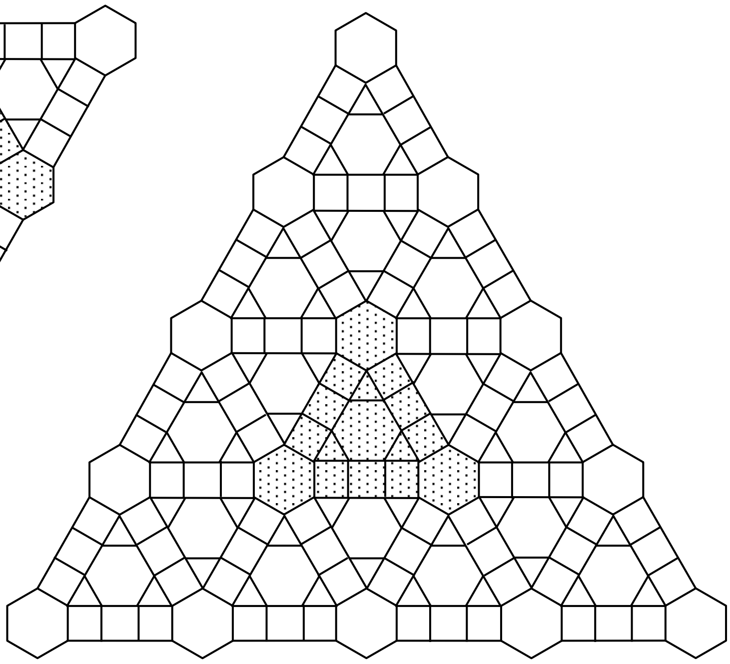
１番目



２番目



３番目



（１）３番目の図形には，１辺の長さが１㎝の正三角形，正方形，正六角形がそれぞれ何個使われていますか。

（２）１辺の長さが１㎝の正六角形が２４７６９個使われるのは何番目の図形ですか。また，その図形において正三角形と正方形はそれぞれ何個使われていますか。

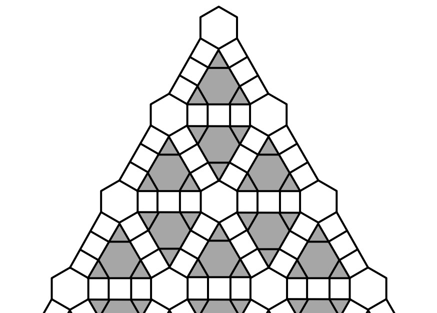
最難関問題

車輪模様のテッセレーション・１
（１）正三角形…４８個，正方形…９０個，正六角形…３１個
（２）８番目，正三角形…４９１５２個，正方形…７４３０４個

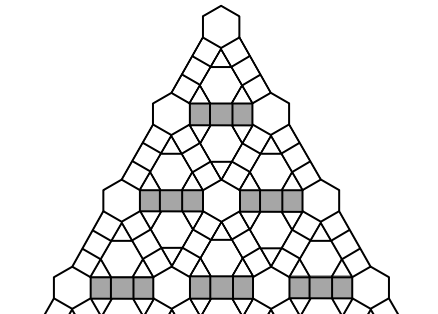
テッセレーションとは，有限の種類の図形を平面に隙間なく敷き詰めることです。この問題では，正三角形・正方形・正六角形を組みあわせて車輪のような模様を描きながら平面を敷き詰めています。また，図形全体は正三角形状の形を保って大きくなっていきます。

（１）１辺１cmの正三角形は図①の影をつけた大きな正三角形の中に３個ずつ入っているので，
３×（１＋３＋５＋７）＝４８（個）です。
１辺１cmの正方形は図②の影をつけた長方形の中に３個ずつ入っています。影をつけた長方形と合同な長方形は向きを変えて考えると３倍の個数あるので，３×（１＋２＋３＋４）×３＝９０（個）です。
１辺１cmの正六角形は図③の影をつけたものが１＋２＋３＋４＋５＝１５（個），斜線部分のものが１＋３＋５＋７＝１６（個）あるので，１５＋１６＝３１（個）です。

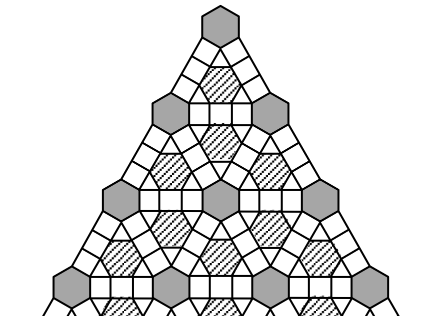
図①



図②



図③



最難関問題

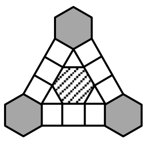
（２）正六角形の個数について，図④，⑤の１番目と２番目の図形に戻って考えます。斜線部分の正六角形の個数は，１個，１＋３＝４（個），３番目では１＋３＋５＋７＝１６（個）というように，１から始まる奇数を１個，２個，４個，…と加えた数になっているため，１×１＝１（個），２×２＝４（個），４×４＝１６（個）になっています。続けると，８×８＝６４（個），１６×１６＝２５６（個），…となり，結果的に毎回４倍になっています。

影をつけた正六角形の個数は，

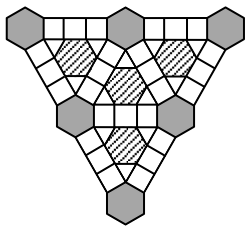
$$\underbrace{1+2}_{2\text{個}}=3\text{（個）},\ \underbrace{1+2+3}_{3\text{個}}=6\text{（個）},\ \underbrace{1+2+3+4+5}_{5\text{個}}=15\text{（個）},\ \cdots$$

となって，１から始まる整数を２個，３個，５個，…と斜線部分の正六角形を求めるために加えた奇数の個数より１個多く加えています。続けると，（１＋…＋９）個，（１＋…＋１７）個，…となります。

図④



図⑤



改めて（１）で考えた３番目の図形について考えてみると，正六角形の個数は，４×４＝１６（個），
１＋２＋３＋４＋５＝５×６÷２＝（１＋５）×５÷２＝１５（個）の和で３１個なので，
４×４＋（１＋５）×５÷２＝４×４＋（２＋４）×（１＋４）÷２
＝４×４＋（４＋１）×（４＋２）÷２＝３１となっています。よって，４にあたる部分を□とすると，□×□＋（□＋１）×（□＋２）÷２＝２４７６９となればよいことになります。ここで大まかな数量関係を考えると，□が大きくなればなるほど，□×□と（□＋１）×（□＋２）の差は大きくなるものの，比は１：１に近づいてきます。よって，□×□と（□＋１）×（□＋２）÷２の比はだいたい

２：１くらいなので，□×□が２４０００×$\dfrac{2}{2+1}$＝１６０００くらいになる場合を考えます。

８×８＝６４（個），１６×１６＝２５６（個），から続けて考えると，３２×３２は９００を超えるくらい，６４×６４は３６００を超えるくらい，１２８×１２８が１００００をそれなりに超え，２５６×２５６は４００００を大きく超えるので，
１２８×１２８＝１６３８４，１２９×１３０÷２＝８３８５，１６３８４＋８３８５＝２４７６９となります。よって，図形は８番目です。

このとき，正三角形の個数は斜線部分の正六角形の３倍なので，１６３８４×３＝４９１５２（個）です。正方形の個数は３×（１＋２＋３＋…＋１２８）×３＝７４３０４（個）です。