受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

３辺が整数比の直角三角形・２（改訂）

　図１の直角三角形ＡＢＣは，辺ＡＢ上の点Ｄ，Ｅおよび辺ＢＣ上の点Ｆ，Ｇについて，
ＢＦ＝ＦＧ＝０.５㎝，ＡＧ＝１㎝で，ＥＦと辺ＢＣ，ＧＤと辺ＡＢは垂直に交わります。

図１

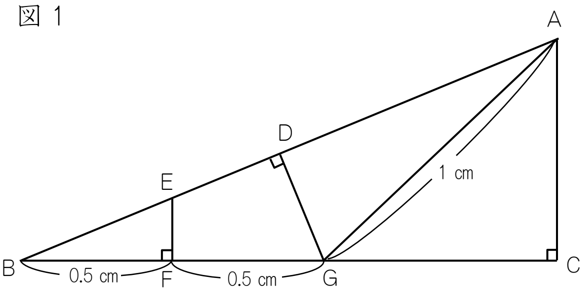
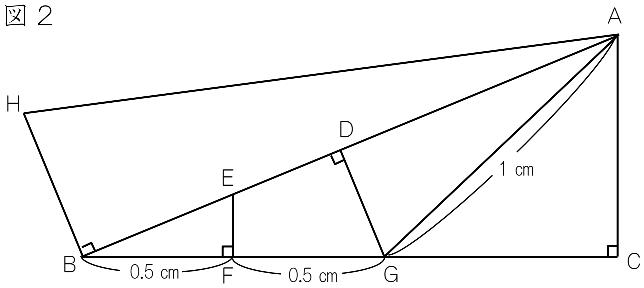


図２



（１）ＢＥの長さが０.６㎝のとき，ＢＤの長さは何㎝ですか。

（２）ＥＦの長さが０.２５㎝のとき，①，②に答えなさい。

①　ＢＨ＝ＢＥとなる図２の直角三角形ＡＢＨの面積は何㎝^{2}ですか。

②　直角三角形ＡＧＣの３辺の長さの比を答えなさい。答えるときは，３：１：２ではなくて１：２：３のように，小さい順に答えなさい。

（３）直角三角形の３辺の長さの比として考えられる整数比を，２つ答えなさい。
ただし，３：４：５，５：１２：１３，８：１５：１７は除きます。また，答えるときは，３：１：２ではなくて１：２：３のように，小さい順に答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

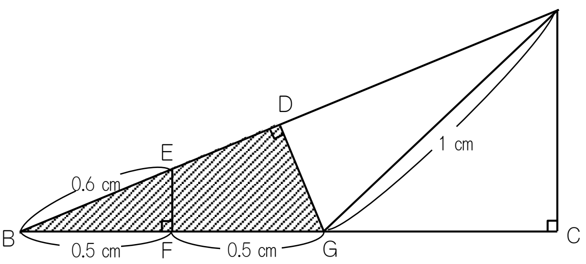
３辺が整数比の直角三角形・２（改訂）

（１）$\frac{5}{6}$cm　（２）①　0.5cm^2　②　３：４：５　（３）解説参照

（１）図①において，直角三角形ＢＥＦとＢＧＤは相似形なので，0.6：0.5＝１：ＢＤより，

ＢＤ＝0.5×１÷0.6＝$\frac{5}{6}$（cm）です。

図①



（２）

①　図①の直角三角形ＢＥＦとＢＧＤの相似より，ＢＥ：ＢＦ＝ＢＧ：ＢＤなので，
ＢＥ×ＢＤ＝ＢＦ×ＢＧ＝0.5×１＝0.5です。よって，ＢＥ×ＢＡ＝0.5×２＝１です。ＢＨ＝ＢＥであることから，三角形ＡＢＨの面積は，１÷２＝0.5（cm^2）です。

つまり，三角形ＡＢＨの面積はＥＦの長さによらずにきまり，ＢＦ×２＝ＢＧの場合には，２×ＢＦ×ＢＦとなります。

最難関問題

②　図②の三角形ＢＥＨは直角二等辺三角形です。辺ＣＢの延長線に点Ｈから垂直な線ＨＩをひくと，三角形ＢＦＥと三角形ＨＩＢは合同となるので，三角形ＢＥＨの面積は，

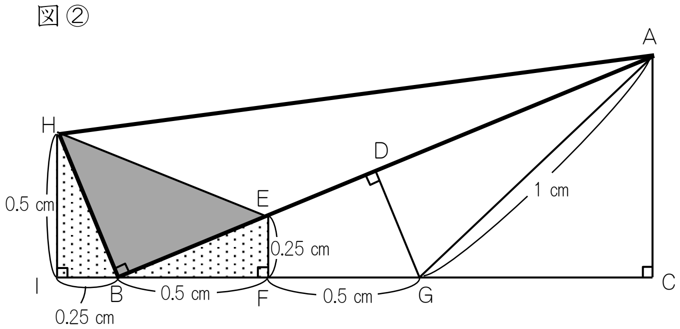
$(0.25+0.5)\times0.75\times\frac{1}{2}-0.25\times0.5\times\frac{1}{2}\times2=\frac{5}{32}$（$cm^2$）です。

三角形ＢＥＨと三角形ＡＢＨの面積の比は，$\frac{5}{32}:\frac{1}{2}$＝５：１６なので，ＢＥ：ＢＡ＝５：１６です。

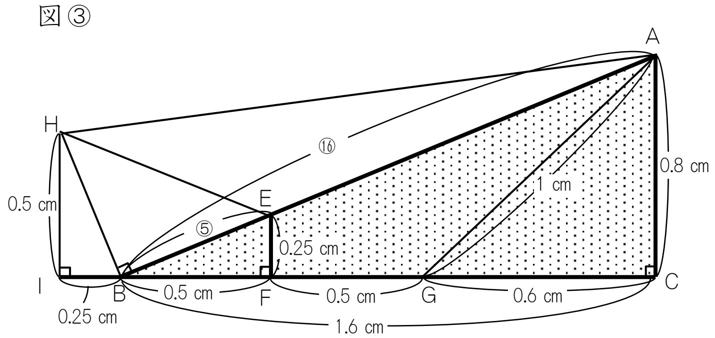
よって，図③の直角三角形ＢＥＦとＢＡＣの相似比は５：１６となり，

辺ＡＣの長さは$0.25\times\frac{16}{5}=0.8$（cm），ＧＣの長さは$0.5\times\frac{16}{5}-1=0.6$（cm）です。直角三角形ＡＧＣの３辺の長さの比は，0.6：0.8：1＝３：４：５です。

図②



図③



（３）ＥＦの長さが0.5cm未満であれば，（２）と同様の方法で直角三角形ＡＧＣの辺ＡＣとＧＣの長さを求めることができるので，直角三角形の３辺の長さの比として考えられる整数比がきまります。こうして，直角三角形の３辺の長さの整数比をいくらでも求めることができます。例えば，右のようになります。

ＥＦ（cm）	３辺の長さの比		
0.05	101	20	99
0.1	13	5	12
0.15	109	60	91
0.2	29	20	21
0.25	5	4	3
0.3	17	15	8
0.35	149	140	51
0.4	41	40	9
0.45	181	180	19

最難関問題

以下は，蛇足とも，プラスアルファともいえる事柄です。図④のようにａとｂの長さをきめます。

台形ＦＥＨＩの面積は，（ａ＋ｂ）×（ａ＋ｂ）÷２＝$\frac{(a+b)\times(a+b)}{2}$，斜線で示した三角形ＢＥＦとＨＩＢの面積はあわせてａ×ｂなので，かげをつけた直角二等辺三角形ＨＢＥの面積は，

$\frac{(a+b)\times(a+b)}{2}-a\times b=\frac{a\times a+2\times a\times b+b\times b}{2}-a\times b=\frac{a\times a+b\times b}{2}$です。また，

（２）①より太線で囲んだ直角二等辺三角形ＡＢＥの面積は２×ｂ×ｂなので，

ＢＥ：ＢＡ＝$\frac{a\times a+b\times b}{2}:(2\times b\times b)=(a\times a+b\times b):(4\times b\times b)$です。

図⑤の太線で示した三角形の相似により，アの長さは，$a\times\frac{4\times b\times b}{a\times a+b\times b}=\frac{4\times a\times b\times b}{a\times a+b\times b}$，

イの長さは，$ア\times\frac{b}{a}=\frac{4\times a\times b\times b}{a\times a+b\times b}\times\frac{b}{a}=\frac{4\times b\times b\times b}{a\times a+b\times b}$，

ウの長さは，イ-２×ｂ＝$\frac{4\times b\times b\times b}{a\times a+b\times b}-2\times b$となるので，直角三角形ＡＣＧの３辺の長さの比は，

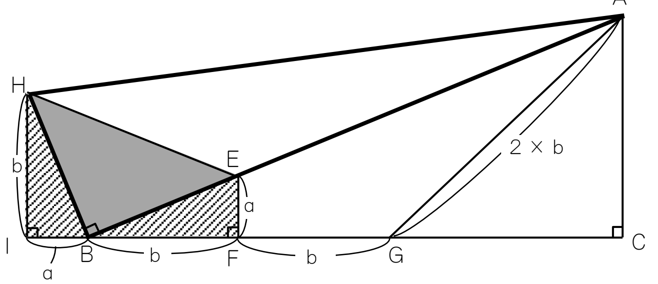
$\frac{4\times a\times b\times b}{a\times a+b\times b}:\left(\frac{4\times b\times b\times b}{a\times a+b\times b}-2\times b\right):(2\times b)=\frac{2\times a\times b}{a\times a+b\times b}:\left(\frac{2\times b\times b}{a\times a+b\times b}-1\right):1$

$=(2\times a\times b):(2\times b\times b-a\times a-b\times b):(a\times a+b\times b)$

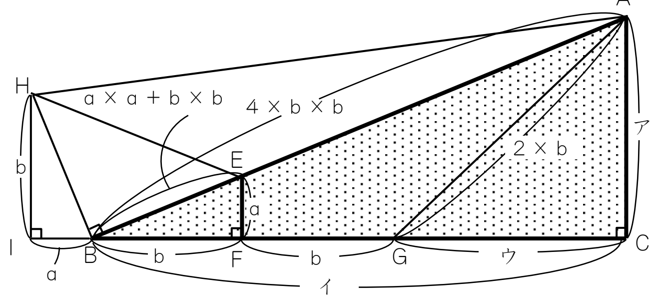
$=(2\times a\times b):(b\times b-a\times a):(a\times a+b\times b)$

となります。

図④



図⑤



最難関問題

この式にしたがって整数比を計算すると，以下のようになります。

a	b	２×ａ×ｂ	ｂ×ｂ－ａ×ａ	ｂ×ｂ＋ａ×ａ
1	2	4	3	5
1	3	6	8	１０
1	4	8	１５	１７
2	3	１２	5	１３
2	5	２０	２１	２９
2	7	２８	４５	５３
3	4	２４	7	２５

なお，サイトにアップしてあるエクセルシートの「ピタゴラス数」は，この方法で整数比を計算できるようになっています。