

最難関問題

各位の数の等しい差（最難関）

2024のとなりあう位の数の差は、どれも2となります。

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & 4 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ 2 & 2 & 2 & \end{array}$$

このように、となりあう位の数の差がすべて等しくなる整数について、考えます。

- (1) となりあう位の数の差がすべて等しくなる3けたの整数は、何個ありますか。
- (2) となりあう位の数の差がすべて等しくなる4けたの整数は、何個ありますか。
- (3) となりあう位の数の差がすべて等しくなる5けたの整数は、何個ありますか。

最難関問題

各位の数の等しい差（最難関） （1）126個 （2）187個 （3）273個

(1) 次のように場合分けをして求めます。

$\boxed{a a a}$

111, 222のように1種類の数字が使われる3けたの整数で, 111~999の9個あります。

$\boxed{a b a}$

121, 838のように2種類の数字が使われる3けたの整数です。aに入る整数は1~9の9通り, bに入る整数は, 0~9のうちaに使われない9通りなので, $9 \times 9 = 81$ (個) あります。

$\boxed{a b c}$

123, 852のように3種類の数字が使われる3けたの整数abcです。bはaとcの平均にあたるので, aとcを決めればbも決まります。また, aとcはどちらも奇数か, 偶数です。

aとcが奇数の場合, aに入る整数は1, 3, 5, 7, 9の5通り, cに入る整数は残りの4通りなので, $5 \times 4 = 20$ (通り) です。

aとcが偶数の場合, aに入る整数は2, 4, 6, 8の4通り, cに入る整数は残りの0, 2, 4, 6, 8のうちaに使われない4通りなので, $4 \times 4 = 16$ (通り) です。

よって, $20 + 16 = 36$ (個) です。

以上より, $9 + 81 + 36 = 126$ (個) です。

最難関問題

(2) (1) に引き続いて場合分けをして求めます。

$a a a a$

1 1 1 1 ~ 9 9 9 9 の 9 個あります。

$a b a b$

3 けたの整数 $a b a$ の右に b をつけるだけなので、 $a b a$ と同じ 8 1 個あります。

$a b c b$

3 けたの整数 $a b c$ の右に b をつけるだけなので、 $a b c$ と同じ 3 6 個あります。

$a b a c$

$b a c$ の部分に注目をします。 a は b と c の平均にあたるので、 b と c を決めれば a も決まります。また、 b と c はどちらも奇数か、偶数です。

b と c が奇数の場合、 b に入る整数は 1, 3, 5, 7, 9 の 5 通り、 c に入る整数は残りの 4 通りなので、 $5 \times 4 = 20$ (通り) です。

b と c が偶数の場合、 b に入る整数は 0, 2, 4, 6, 8 の 5 通り、 c に入る整数は残りの 4 通りなので、 $5 \times 4 = 20$ (通り) です。

よって、 $20 \times 2 = 40$ (個) です。

$a b c d$

差が 1 の場合は、 9 8 7 6, ..., 4 3 2 1, 3 2 1 0 で、 3 2 1 0 以外は逆の順番もありなので、 $6 \times 2 + 1 = 13$ (個) です。

差が 2 の場合は、 9 7 5 3, 8 6 4 2, 7 5 3 1, 6 4 2 0 で、 6 4 2 0 以外は逆の順番もありなので、 $3 \times 2 + 1 = 7$ (個) です。

差が 3 の場合は、 9 6 3 0 の 1 個です。あわせて、 $13 + 7 + 1 = 21$ (個) です。

以上より、 $9 + 81 + 36 + 40 + 21 = 187$ (個) です。

最難関問題

(3) (1) (2) に引き続いて場合分けをして求めます。

$a a a a a$

1 1 1 1 1 ~ 9 9 9 9 9 の 9 個あります。

$a b a b a$

4 けたの整数 $a b a b$ の右に a をつけるだけなので、 $a b a b$ と同じ 8 1 個あります。

$a b c b c$

4 けたの整数 $a b c b$ の右に b をつけるだけなので、 $a b c b$ と同じ 3 6 個あります。

$a b c b a$

4 けたの整数 $a b c b$ の右に a をつけるだけなので、 $a b c b$ と同じ 3 6 個あります。

$a b a b c$

3 けたの整数 $a b c$ の左に $a b$ をつけるだけなので、 $a b c$ と同じ 3 6 個あります。

$b a b c b$

4 けたの整数 $b a b c$ の右に b をつけるだけなので、 $b a b c$ と同じ 4 0 個あります。

$a b c d c$

4 けたの整数 $a b c d$ の右に c をつけるだけなので、 $a b c d$ と同じ 2 1 個あります。

$a b c d e$

差が 1 の場合は、 $9 8 7 6 5, \dots, 5 4 3 2 1, 4 3 2 1 0$ で、 $4 3 2 1 0$ 以外は逆の順番もありなので、 $5 \times 2 + 1 = 11$ (個) です。

差が 2 の場合は、 $9 7 5 3 1, 8 6 4 2 0$ で、 $9 7 5 3 1$ は逆の順番もありなので、 $2 + 1 = 3$ (個) です。あわせて、 $11 + 3 = 14$ (個) です。

以上より、 $9 + 81 + 36 \times 3 + 40 + 21 + 14 = 273$ (個) です。