

最難関問題

塗り分けと色々な法則性

図1のように、たてに2つ、横にいくつかマス目を並べたマス目を、赤・青・黄の3色で塗ります。すべてのマスをどれか1つの色でぬり、上下左右にとなりあうマスは同じ色にならないようするので、たとえば図2のような塗り方になります。

図1

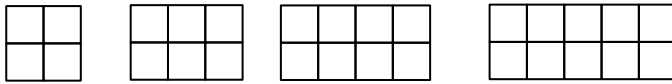


図2



(1) 横に2, 3, 4マス並べたとき、色のぬり方はそれぞれ何通り考えられますか。

(2) 次の①, ②について、残りのマスの塗り方は何通り考えられますか。

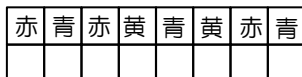
①



②



(3) 次のマス目では、残りのマスの塗り方は何通り考えられますか。



(4)

①

赤	青	黄	赤	青	黄

 ... のように上の行のマスが赤・青・黄で繰り返し塗ってあります。
横に100マス並んでいるとき、残りのマス(下の行のマス)の塗り方は何通りありますか。

②

赤	青	赤	黄	赤	青	赤	黄

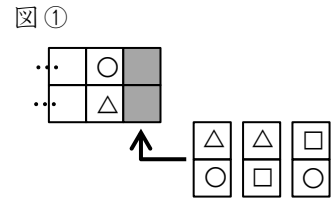
 ... のように上の行のマスが赤・青・赤・黄で繰り返し塗ってあります。
残りのマス(下の行のマス)の塗り方が1000通り以上になるのは、横に何マス以上並んでいる場合ですか。



最難関問題

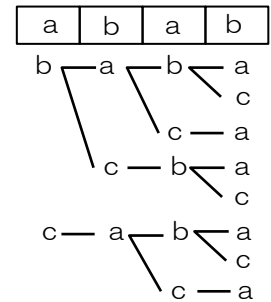
- (1) 2マス…18通り, 3マス…54通り, 4マス…162通り (2) ①5通り ②21通り
 (3) 30通り (4) ①101通り ②16マス

(1) 図①のように, 右側の上下2マスが(○, △)のとき, その右側には(△, ○), (△, □), (□, ○)の3通りの塗り方があります。よって, 横のマスが1列増えるごとに, 塗り方は3倍になります。横に1マスのときの塗り方は $3 \times 2 = 6$ (通り)なので, 2マスでは $6 \times 3 = 18$ (通り), 3マスでは $18 \times 3 = 54$ (通り), 4マスでは $54 \times 3 = 162$ (通り)です。



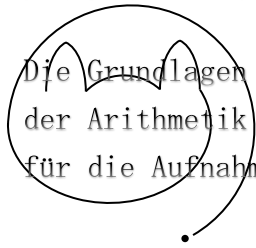
(2) 以下では, 赤をa, 青をb, 黄をcの記号で表します。①は横に3列ですが, 4列の場合までを樹形図で調べると, 図②のようになります。a, bは毎回2つに枝分かれし, cは枝分かれをしていません。こうして, 塗り方は横1列のときから順に, 2通り, 3通り, 5通り, 8通りと, フィボナッチ数列になっています。よって, ①は5通り, ②は $5 + 8 = 13$, $8 + 13 = 21$ (通り)です。

図②



(3) (2) より, フィボナッチ数列に関わる考え方を利用して, 下の表のように左側のマスから順に塗り方を調べていきます。一番左の列は, 上のマスが赤(a)なので, 青(b)か黄(c)ですから, $1 + 1 = 2$ (通り)です。2番目の列は上のマスがbで, aに塗るのは左がbかcの場合ですから, $1 + 1 = 2$ (通り), cに塗るのは左がbの場合ですから1通りで, あわせて $2 + 1 = 3$ (通り)です。以降も同様に考えていくと, 下の表のようになって30通りです。

	a	b	a	c	b	c	a	b
計	2	3	5	7	9	16	23	30
…a	0	2	0	5	2	7	0	23
…b	1	0	3	2	0	9	7	0
…c	1	1	2	0	7	0	16	7



最難関問題

(4)

- ① (3)と同様に調べていくと、下の表のよう2通り、3通り、4通り、…となるので、横に100列の場合は101通りです。

	a	b	c	a	b	c	a	b	...
計	2	3	4	5	6	7	8	9	...
... a	0	2	1	0	5	1	0	8	...
... b	1	0	3	1	0	6	1	0	...
... c	1	1	0	4	1	0	7	1	...

- ② ある程度調べていくと、下の表のようになります。

	a	b	a	c	a	b	a	c	...
計	2	3	5	7	12	17	29	41	...
... a	0	2	0	5	0	12	0	29	...
... b	1	0	3	2	5	0	17	12	...
... c	1	1	2	0	7	5	12	0	...

表をよく見ると、 $2 + 3 = 5$ 、 $2 + 5 = 7$ 、 $5 + 7 = 12$ 、 $5 + 12 = 17$ 、 $12 + 17 = 29$ 、 $12 + 29 = 41$ というように、(1つ前と2つ前の数の和)、(1つ前と3つ前の数の和)、(1つ前と2つ前の数の和)、(1つ前と3つ前の数の和)、という繰り返しになるので、 $29 + 41 = 70$ 、 $29 + 70 = 99$ 、 $70 + 99 = 169$ 、 $70 + 169 = 239$ 、 $169 + 239 = 408$ 、 $169 + 408 = 577$ 、 $408 + 577 = 985$ 、 $408 + 985 = 1393$ となって、1000以上になります。数えて、16マスです。