最難関問題

積み上げ数

６けたの整数３４３０１０は，どの位の数も，それより下の位の数のうちで，より小さい数の個数を表しています。例えば千の位の３は，それより下の位の０，１，０の３つより大きいことを表し，百の位の０は，それより下の位により小さい数がないことを表しています。このような数を，「積み上げ数」とよぶことにします。

次に，いろいろな整数を，各位の数をそれより下の位の数のうちでより小さい数の個数に変える操作を繰り返すことで，積み上げ数に変えます。例えば６３１３２１の場合，１回目の操作で５３０２１０，２回目の操作で５４０２１０となって，積み上げ数になります。また，２５４３の場合，１回目の操作で，０２１０となります。０２１０は整数ではないので，操作は失敗です。３０００の場合，すでに積み上げ数になっているので，操作は行わないこととします。以下の問いに答えなさい。

（１）７３２５４１を積み上げ数にしなさい。

（２）１回の操作で積み上げ数１２１０になる整数は何個ありますか。

（３）操作が必要ない場合も含めて，何回かの操作で積み上げ数になる３けたの整数は全部で何個ありますか。

最難関問題

積み上げ数　（１）５４１２１０　（２）３２９個　（３）６１５個

（１）７３２５４１→５２１２１０→５３１２１０→５４１２１０となるので，５４１２１０です。

（２）操作によって整数の桁数は変わりませんから，１回の操作で１２１０になる４けたの整数ａｂｃｄの条件を考えます。ｃは１回の操作で１となることから，ｄより大きい数です。ｂは１回の操作で２となることから，ｃとｄより大きい数，つまりはｃより大きい数です。ａはｂ，ｃ，ｄのどれか１つより大きい数なので，ｂ，ｃ，ｄのうちで最も小さい数であるｄより大きく，２番目に小さい数であるｃより小さい数です。

　まとめると，ｄ＜ａ≦ｃ＜ｂと表せます。この場合，０～９の１０種類の数から３つか４つの異なる数を選んで小さい順にｄ，ａ，ｂ，ｃとすればよいので，$\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}+\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=330$（通り）です。このうちには１２１０も含まれているので，３３０－１＝３２９（個）です。

最難関問題

（３）（２）では，１回の操作で１２１０になる整数が３２９通りあることをみました。このようにして求めた３２９通りのすべてについて，さらにさかのぼっていくようなことは不可能です。そこで，3けたの整数に操作を行うと，どのような変化が起こるのかを考えます。3けたの整数ａｂｃに１回操作を行うと，ｃは0になります。ｂは１か０，ａは２か１か０です。ただし，ａが０になると操作は失敗となるので，それを除くと，１回の操作でできる整数は１００，１１０，２００，２１０のいずれかです。この４つの数のうちで，１１０，２００，２１０は積み上げ数です。１００はもう１回操作を行うことで，２００になります。このように，３けたの整数を積み上げ数にする操作の回数は１回か２回です。

１回の操作で１００，１１０，２００，２１０になる３けたの整数ａｂｃをそれぞれ求めると，以下のようになります。

$\boxed{\text{１００になる整数}}$

３けたの整数ａｂｃにおいて，ｂは１回の操作で０となることから，ｃ以下の数です。ａは１回の操作で１となることから，ｂとｃのどちらか一方より大きい数，つまりはｂより大きくｃ以下の数です。よって，ｂ＜ａ≦ｃです。この場合，０～９の１０種類の数から２つか３つの異なる数を選んで小さい順にｂ，ａ，ｃとすればよいので，$\dfrac{10\times9}{2\times1}+\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$＝１６５（個）です。

$\boxed{\text{１１０になる整数}}$

３けたの整数ａｂｃにおいて，ｂは１回の操作で１となることから，ｃより大きい数です。ａは１回の操作で１となることから，ｂとｃのどちらか一方より大きい数，つまりはｃより大きくｂ以下の数です。よって，ｃ＜ａ≦ｂです。この場合，０～９の１０種類の数から２つか３つの異なる数を選んで小さい順にｃ，ａ，ｂとすればよいので，１６５個です。

$\boxed{\text{２００になる整数}}$

３けたの整数ａｂｃにおいて，ｂは１回の操作で０となることから，ｃ以下の数です。ａは１回の操作で２となることから，ｂとｃの両方より大きい数です。よって，ｂ≦ｃ＜ａです。この場合，０～９の１０種類の数から２つか３つの異なる数を選んで小さい順にｂ，ｃ，ａとすればよいので，１６５個です。

最難関問題

２１０になる整数

３けたの整数ａｂｃにおいて，ｂは１回の操作で１となることから，ｃより大きい数です。ａは１回の操作で２となることから，ｂとｃの両方より大きい数です。よって，ｃ＜ｂ＜ａです。この場合，０～９の１０種類の数から３つの異なる数を選んで小さい順にｃ，ｂ，ａとすればよいので，

$\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$＝１２０（個）です。

１００，１１０，２００，２１０は以上の場合分けにおいて１回ずつ数えられているので，最後に引く必要はありません。よって，１２０＋１６５×３＝６１５（個）です。