受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

アルキメデスの立体・立方八面体

図１のように立方体の各辺の中点を結んで，図２の立体Ｘを作ったところ，辺ＡＢの長さは１㎝になりました。次の問いに答えなさい。

図１

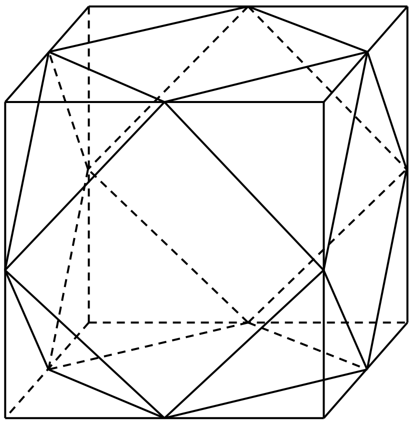
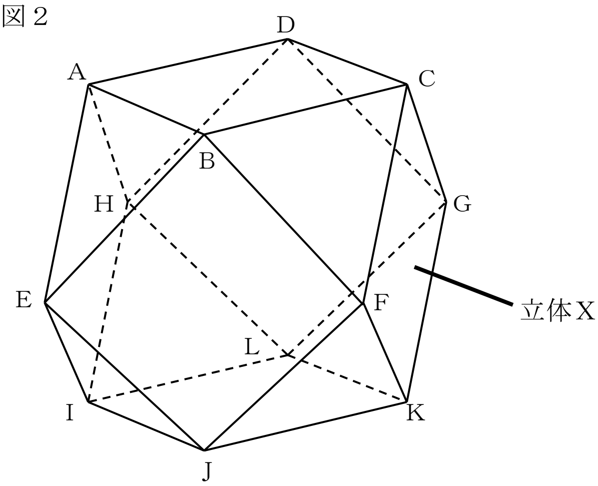


図２



（１）立体Ｘを，辺ＡＨ上の点Ｐを通り，面ＢＣＦと平行な面で切断したところ，切り口の周りの長さは５㎝になりました。長さの比ＡＰ：ＰＨを求めなさい。

（２）立体Ｘを，ＣＱ：ＱＧ＝２：３である辺ＣＧ上の点Ｑを通り，面ＡＢＥと平行な面で切断しました。切り口の面積は，面ＡＢＥの面積の何倍ですか。

最難関問題

アルキメデスの立体・立方八面体（１）１：２　（２）$3\frac{19}{25}$倍

立体Ｘは，全ての辺の長さが等しく，正三角形８個と正方形６個からなる１４面体で，１３種類あるアルキメデスの立体の１つ，立方八面体です。正四面体や立方体，正八面体といった正多面体とは異なり，面の形が２種類以上あります。

（１）立体Ｘにおいて，面ＢＣＦと平行であり頂点Ａを含む面は，図３のように正六角形ＡＥＪＫＧＤです。よって，求める切断面は，辺ＡＨ上の点Ｐを通って各辺が正六角形ＡＥＪＫＧＤと平行である，図４のような六角形になります。

図４において，ＰＲの長さはＡＥに等しいので，１㎝です。切断面には１㎝の辺が３本あるので，５－１×３＝２（㎝）が残りの３本の辺の長さの合計，２÷３＝$\frac{2}{3}$（㎝）が辺ＰＳの長さです。図５において三角形ＨＰＳと三角形ＨＡＤの相似比は，$\frac{2}{3}$：１＝２：３ですから，ＡＰ：ＰＨ＝（３－２）：２＝１：２です。

図３

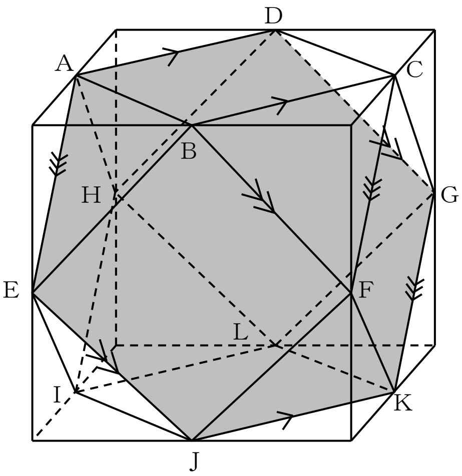


図４

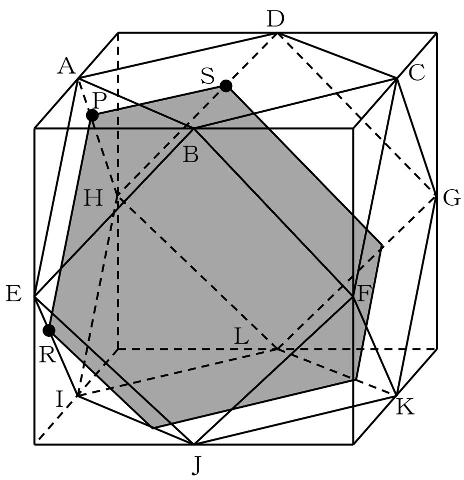
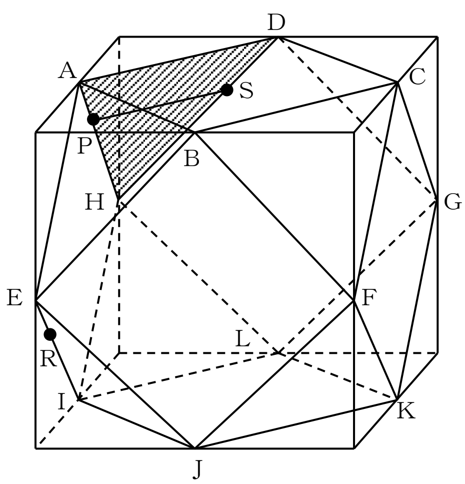


図５



最難関問題

（２）立体Ｘにおいて，面ＡＢＥと平行であり頂点Ｃを含む面は図６のように正六角形ＤＨＩＪＦＣ，頂点Ｇを含む面は図７のように正三角形ＧＬＫです。求める切断面は，辺ＣＧ上の点Ｑを通って各辺が正六角形ＤＨＩＪＦＣと平行である，図８のような六角形になります。

図６

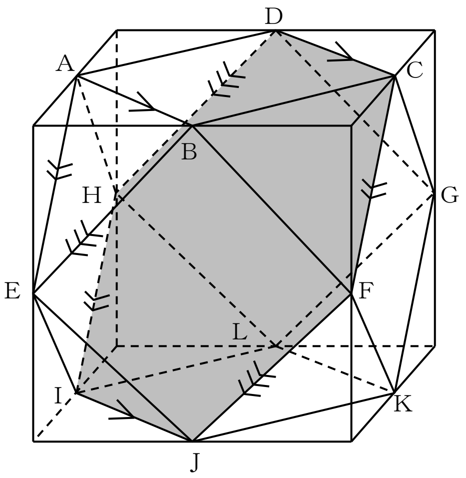


図７

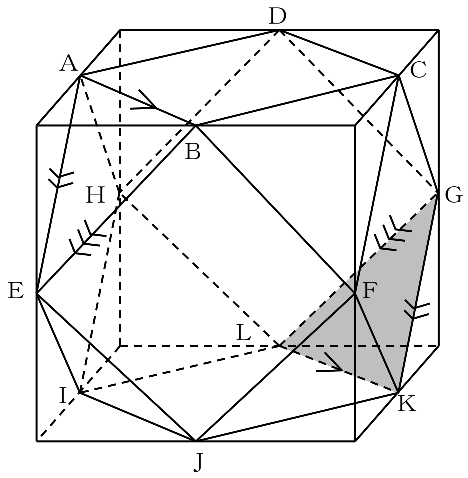
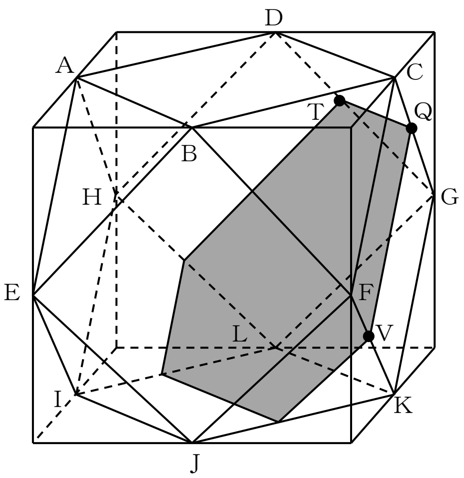


図８



面ＤＨＩＪＦＣ，面ＧＬＫ，切断面を垂直な向きから見ると，図９のような投影図になります。図１０より，辺の長さが１cmの正六角形の面積は辺の長さが１cmの正三角形の６倍ですから，正六角形ＤＨＩＪＦＣは正三角形ＧＬＫの６倍の面積です。

図９

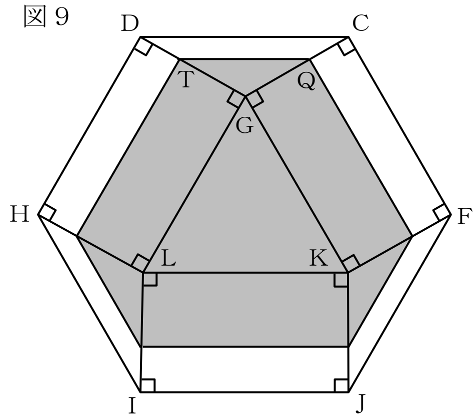
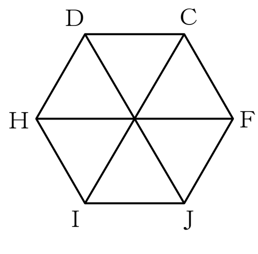


図10



最難関問題

次に，投影図９における三角形ＣＤＧの面積を考えます。角ＧＤＣの大きさは，１２０－９０＝３０（度）ですから，図１１のように直角三角形ＧＤＵを作りＵＧ＝①とすると，ＧＤ＝②となります。三角形ＧＬＫの周りにできる長方形の短いほうの辺の長さが②ですから，正六角形の辺に垂直な線を引いて「高さ」を考えると，図１２のようになります。図１０より辺の長さが等しい正六角形の高さは正三角形の高さの２倍ですから，正三角形ＧＬＫの高さは③となります。

図 11

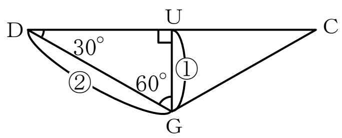
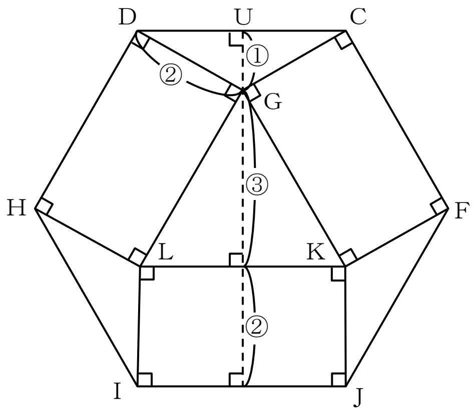


図 12



よって，図１３において影をつけた三角形の面積はそれぞれ正三角形ＧＬＫの面積の$\frac{1}{3}$倍，斜線部の長方形の面積はそれぞれ正三角形ＧＬＫの（６－１－$\frac{1}{3}$×３）÷３＝$\frac{4}{3}$（倍）です。

ＣＱ：ＱＧ＝２：３であることから，図１４において三角形ＧＱＴの面積は正三角形ＧＬＫの面積の$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$（倍），長方形ＱＧＫＶの面積は正三角形ＧＬＫの面積の$\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$（倍）です。よって，切断面の面積は，$1+\frac{3}{25}\times3+\frac{4}{5}\times3=3\frac{19}{25}$（倍）です。

図 13

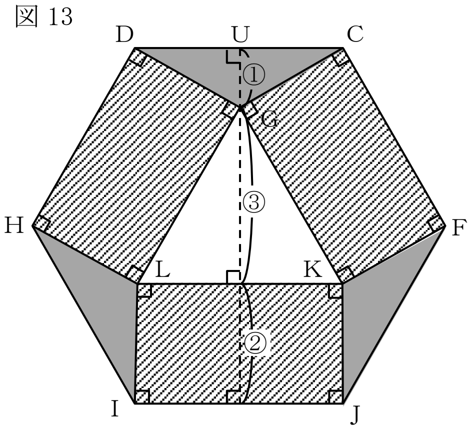


図 14