最難関問題

となりあう２つの整数の剰余

整数Ａを整数ｎで割ったところ余りが４に，整数ｎ＋１で割ったところ余りが１５になりました。

（１）整数Ａとして考えられるもののうち，小さいほうから１番目と２番目のものを答えなさい。

（２）整数Ａとして考えられるもののうち，小さいほうから１２番目のものを答えなさい。

（３）整数Ａとして考えられるもののうち，１０００以上１１００以下のものをすべて答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する整数と剰余

（１）１番目…７９，２番目…１００　（２）３７２

（３）１００３，１０２９，１０３９，１０４１，１０４４，１０６８

（１）整数Ａをｎ＋１で割ると余りが１５になるということから，ｎ＋１は１６以上の整数であり，ｎは１５以上の整数となります。ｎ＝１５の場合から順に調べていくと，次のようになります。

ｎ＝１５…１５で割って４余り，１６で割って１５余る最小の整数は，７９

ｎ＝１６…１６で割って４余り，１７で割って１５余る最小の整数は，１００

ｎ＝１７…１７で割って４余り，１８で割って１５余る最小の整数は，１２３

このように見ていくと，ｎが大きくなるのに従って，整数Ａも大きくなりそうです。このことは，次のように確かめることができます。整数Ａをｎで割った商は，ｎ＋１で割った商よりも大きくなります。そこで，２つの商の差を１として，整数Ａをｎで割った商をｍ＋１，整数Ａをｎ＋１で割った商をｍとします。

ｎ×（ｍ＋１）＋４＝（ｎ＋１）×ｍ＋１５，

ｎ×（ｍ＋１）＝（ｎ＋１）×ｍ＋１１，

ｎ×ｍ＋ｎ＝ｎ×ｍ＋ｍ＋１１，

ｎ＝ｍ＋１１，ｎ－１１＝ｍ，

となるので，ｎ×（ｍ＋１）＋４＝ｎ×（ｎ－１０）＋４です。

ｎに１５から順に整数を入れていくと，

１５×（１５－１０）＋４＝１５×５＋４＝７９，

１６×（１６－１０）＋４＝１６×６＋４＝１００，

１７×（１７－１０）＋４＝１７×７＋４＝１２３，となります。

よって，小さいほうから１，２番目は，７９，１００となります。

（２）（１）で求めた７９，１００，１２３，…がどのような数列かを考えます。７９と１００の差は，１５×５と１６×６の差にあたります。

１６×６－１５×５＝（１６×５＋１６）－１５×５＝５＋１６＝２１，

となるので，１００と１２３は６＋１７＝２３となります。こうして，ｎ＝１５，１６，１７，…のときの最小のＡは，差が２ずつ大きくなる階差数列であることがわかります。

ｎ＝15　16　17　18　19　20　21　22　23　24　25　…

79　100　123　148　175　204　235　269　303　340　379　…

21　23　25　27　29　31　33　35　37　39

最難関問題

次に，ｎ＝１５，１６，１７，…のときの２番目，３番目に小さいＡについて考えます。
ｎ＝１５…７９＋１５×１６＝３１９，３１９＋１５×１６＝５５９
ｎ＝１６…１００＋１６×１７＝３７２，３７２＋１６×１７＝６４４
ｎ＝１７…１２３＋１７×１８＝４２９，４２９＋１７×１８＝７３５

まとめると，つぎのようになるので，１２番目は３７２です。

ｎ＝15　16　17　18　19　20　21　22　23　24　25　…
79　100　123　148　175　204　235　269　303　340　379　…
21　23　25　27　29　31　33　35　37　39

319　372　429　…
559　644　735　…

（３）（２）から続けて考えると，下のように複数の階差数列ができます。

ｎ＝15　16　17　18　19　20　21　22　23　24　25　26　…　37　38
79　100　123　148　175　204　235　269　303　340　379　420　…　1003　1068
21　23　25　27　29　31　33　35　37　…
319　372　429　490　555　624　697　774　855　940　1029　1122　…
53　57　61　…
559　644　735　832　935　1044　1159　…
85　91　97　…
799　916　1041　1174　…
117　125　133　…
1039　1188　…
1279　…

よって，１００３，１０２９，１０３９，１０４１，１０４４，１０６８です。