受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

カードの置き換え（最難関）

数字の書かれたカードを一列に並べます。

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ …

次に，一番左のカードを，書いてある数字の分だけ右に動かし，そこにあるカードを取り除いて代わりに置いていきます。

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ …

１回目

$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ …

２回目

$\boxed{4}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ …

３回目

$\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ …

３が書かれたカードから，カードを数字順に並べた場合について，次の問いに答えなさい。

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ …

（１）カードを３回，７回置き換えたとき，一番左にあるカードに書いてある数字をそれぞれ答えなさい。

（２）カードを１１回，１２回，１３回置き換えたとき，一番左にあるカードに書いてある数字をそれぞれ答えなさい。

（３）次のカードのうち，一番左にくることができるカードをすべて答えなさい。

$\boxed{20}$ $\boxed{40}$ $\boxed{60}$ $\boxed{80}$ $\boxed{100}$ $\boxed{35}$ $\boxed{70}$ $\boxed{105}$ $\boxed{140}$

（４）１０００以下の数字が書かれたカードのうち，一番左にくることができるカードは何枚ありますか。

最難関問題

カードの置き換え（最難関）

（１）３回…３，７回…５　（２）１１回…７，１２回…３，１３回…１６

（３）$\boxed{20}$　$\boxed{80}$　$\boxed{100}$　$\boxed{35}$　$\boxed{140}$

（４）４４４個

（１）調べていくと，次のようになります。一度置き換えたカードは，影をつけてあります。

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
4	5	3	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
5	3	7	4	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
3	7	4	9	5	11	12	13	14	15	16	17	18	…
7	4	3	5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…
4	3	5	11	12	13	7	15	16	17	18	19	20	…
3	5	11	4	13	7	15	16	17	18	19	20	21	…
5	11	3	13	7	15	16	17	18	19	20	21	22	…

よって，３回では３，７回では５です。

（２）（１）において置き換えによって取り除かれたカードは，次のようになります。

$\boxed{3}$のカード…$\boxed{6}$，$\boxed{9}$，$\boxed{4}$，…

$\boxed{4}$のカード…$\boxed{8}$，$\boxed{12}$

$\boxed{5}$のカード…$\boxed{10}$，…

基本的には，倍数のカードが取り除かれています。しかし，$\boxed{4}$のカードはあらかじめ$\boxed{12}$のカードに置き換わっていたため，$\boxed{3}$のカードは$\boxed{12}$のカードの代わりに$\boxed{4}$のカードを取り除きます。よって，$\boxed{4}$のカードは$\boxed{8}$と$\boxed{12}$のカードしか取り除きません。

ここからわかるのは，

・$\boxed{3}$のカードは３の倍数のカード，$\boxed{4}$のカードは４の倍数のカードと置き換わる

・３と４の最小公倍数にあたる$\boxed{12}$のカードには，置き換わる前，$\boxed{3}$のカードは$\boxed{9}$のカードに，$\boxed{4}$のカードは$\boxed{8}$のカードに置き換わっているので，先に$\boxed{4}$のカードが$\boxed{12}$のカードに置き換わり，その後$\boxed{3}$のカードが$\boxed{4}$のカードに置き換わる。

以上の考えを用いて，１１，１２，１３回操作をしたときの一番左のカードを考えます。

$\boxed{\text{１１回}}$

操作を始める前に一番左は$\boxed{3}$のカードですから，１１回操作をしたときの一番左のカードは，３＋１１＝１４より，$\boxed{14}$のカードか，$\boxed{14}$のカードに置き換わったカードです。１４＝２×７より，１４は２と７の倍数ですが，$\boxed{2}$のカードはそもそも無いので，$\boxed{7}$のカードに置き換わっています。よって，$\boxed{7}$のカードです。

$\boxed{\text{１２回}}$

１２回操作をしたときの一番左のカードは，$\boxed{15}$のカードか，$\boxed{15}$のカードに置き換わったカードです。１５＝３×５より，１５は３と５の最小公倍数なので，まず$\boxed{10}$のカードに置き換わった$\boxed{5}$のカードが置き換わり，次に$\boxed{12}$のカードに置き換わった$\boxed{3}$のカードが置き換わります。よって，$\boxed{3}$のカードです。

$\boxed{\text{１３回}}$

１３回操作をしたときの一番左のカードは，$\boxed{16}$のカードか，$\boxed{16}$のカードに置き換わったカードです。１６＝２×２×２×２より，１６は４，８の倍数です。$\boxed{8}$のカードは$\boxed{4}$のカードに置き換わっており，$\boxed{4}$のカードは$\boxed{12}$のカードに置き換わった後で$\boxed{3}$のカードによって除かれるので，$\boxed{16}$のカードは他のカードによって置き換わっていません。よって，$\boxed{16}$のカードです。

最難関問題

（３）

○$\boxed{20}$

２０の約数にあたるカードは，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{10}$のカードです。$\boxed{4}$，$\boxed{5}$のカードは$\boxed{3}$のカードに置き換えられ，$\boxed{10}$のカードは$\boxed{5}$のカードに置き換えられているので，$\boxed{20}$のカードは一番左にくることができます。

○$\boxed{40}$

$\boxed{20}$のカードは一番左にきた後で$\boxed{40}$のカードに置き換わるので,$\boxed{40}$のカードが一番左にくることはありません。

○$\boxed{60}$

３の倍数のカードなので，$\boxed{60}$のカードが一番左にくることはありません。

○$\boxed{80}$

８０の約数にあたるカードは，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{8}$，$\boxed{10}$，$\boxed{16}$，$\boxed{20}$，$\boxed{40}$のカードです。$\boxed{8}$のカードは$\boxed{4}$のカードに置き換えられ，$\boxed{16}$のカードは４８のところで$\boxed{3}$のカードに置き換えられ，$\boxed{20}$のカードは６０のところで$\boxed{3}$のカードに置き換えられ$\boxed{40}$のカードは$\boxed{20}$のカードに置き換えられているので，$\boxed{80}$のカードは一番左にくることができます。

○$\boxed{100}$

１００の約数にあたるカードは，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{10}$，$\boxed{20}$，$\boxed{25}$，$\boxed{50}$のカードです。$\boxed{25}$のカードは一番左にくることができますが，７５のところで$\boxed{3}$のカードに置き換えられ，$\boxed{50}$のカードは$\boxed{25}$のカードに置き換えられているので，$\boxed{100}$のカードは一番左にくることができます。

○$\boxed{35}$

３５の約数にあたるカードは，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$のカードです。$\boxed{7}$のカードは２１のところで$\boxed{3}$のカードに置き換えられているので，$\boxed{35}$のカードは一番左にくることができます。

○$\boxed{70}$

$\boxed{35}$のカードは一番左にきた後で$\boxed{70}$のカードに置き換わるので,$\boxed{70}$のカードが一番左にくることはありません。

○$\boxed{105}$

３の倍数のカードなので，１０５のカードが一番左にくることはありません。

○$\boxed{140}$

１４０の約数にあたるカードは，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{10}$，$\boxed{14}$，$\boxed{20}$，$\boxed{28}$，$\boxed{35}$，$\boxed{70}$のカードです。$\boxed{14}$のカードは$\boxed{7}$のカードに置き換えられ，$\boxed{28}$のカードは$\boxed{84}$のカードに置き換えられ，$\boxed{35}$のカードは１０５のところで$\boxed{3}$のカードに置き換えられ，$\boxed{70}$のカードは$\boxed{35}$のカードに置き換えられているので，$\boxed{140}$のカードは一番左にくることができます。

（４）一番左に来ることができるカードは，どのようなカードでしょうか。

まず，（３）の３５は，素因数分解をすると５×７になります。このとき，$\boxed{5}$のカードは$\boxed{15}$のカードのところで，$\boxed{7}$のカードは$\boxed{21}$のカードのところで$\boxed{3}$のカードによって置き換えられているので，$\boxed{35}$のカードは一番左に来ることができます。また，$\boxed{175}$のカードの場合，１７５＝５×５×７より，５，７に加えて２５や３５も約数ですが，同様に２５×３＝７５，３５×３＝１０５より，$\boxed{25}$のカードや$\boxed{35}$のカードも取り除かれています。

これらの数は，素因数分解をしたときに５以上の素数しか現れていません。仮に整数Ａの素因数分解が○×□×□で○と□が５以上の素数であるとすると，１とＡを除くＡの約数である○，□，○×□，□×□のカードは○×３，□×３，○×□×３，□×□×３という，○×□×□より小さい数のところで$\boxed{3}$のカードによって置き換えられているので，Ａのカードは一番左に来ることができるわけです。

次に，３５の倍数のカードを考えます。$\boxed{70}$と$\boxed{105}$のカードは$\boxed{35}$のカードによって置き換えられ，$\boxed{35}$のカードは$\boxed{105}$のカードの位置で$\boxed{3}$のカードによって置き換えられます。このことによって，$\boxed{140}$のカードは置き換えられることなく一番左に来ることができます。

同様にして，１４０の倍数のカードでは，$\boxed{280}$と$\boxed{420}$のカードは置き換えられ，$\boxed{560}$のカードは置き換えられることなく一番左に来ることができます。

このようにして，３５×４，３５×１６，３５×６４，３５×２５６，…のカードは一番左に来ることができます。

よって，素因数分解をしたときに２と３が現れない数と，その数を次々に４倍していった数は，一番左に来ることができます。また，$\boxed{4}$のカードも一番左に来ることができるので，同じ仕組みによって，４と，４を次々に４倍していった数も一番左に来ることができます。最後に，３も一番左に来ることができます。

以上の条件に当てはまらない数（余事象に当たる数）は，３を除く３の倍数と，
素因数分解をしたときに２と３が現れない数（つまり３の倍数ではない奇数）を２倍した数と，それを次々に４倍していった数です。

最難関問題

　では，これらの整数の個数を求めていきましょう。

３以外の３の倍数

　３×２～３×３３３までの，３３１個です。

３の倍数ではない奇数を２倍した数と，それを次々に４倍していった数

○２×（３の倍数ではない奇数）

　ただし，２×１＝２のカードはそもそもないので，除きます。よって，２×３～２×５００までを考えて，３以上５００以下の奇数は（５００－２）÷２＝２４９（個），２４９個のうち3分の1は3の倍数なので，残りを求めて，２４９÷３×２＝１６６（個）です。

○８×（３の倍数ではない奇数）

　８×１～８×１２５までを考えて，１２５以下の奇数は１２５÷２＝６２余り１より６３個，６３個のうち３分の１は３の倍数なので，残りを求めて，６３÷３×２＝４２（個）です。

○３２×（３の倍数ではない奇数）

　３２×１～３２×３１までを考えて，３１以下の奇数は３１÷２＝１５余り１より１６個，３１以下の３の倍数の奇数は３，９，１５，２１，２７の５個なので，１６－５＝１１（個）です。

○１２８×（３の倍数ではない奇数）

　１２８×１，１２８×５，１２８×７の３個です。

○５１２×（３の倍数ではない奇数）

　５１２×１の１個です。

　３３１＋１６６＋４２＋１１＋３＋１＝５５４（個）が置き換えられて一番左に来ることができない数なので，一番左に来ることができる数は，９９８－５５４＝４４４（個）です。