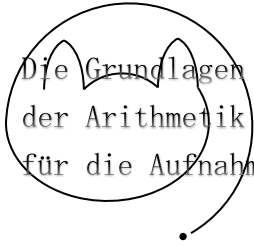


素数の個数と素因数分解・1

18を素因数分解すると、 $2 \times 3 \times 3$ となります。かけ算の式には、2が1個と3が2個現れています。このとき、 $[18] = (2 \times 1) \times (3 \times 2) = 12$ とします。次の問いに答えなさい。

- (1) $[36]$, $[105]$ をそれぞれ計算しなさい。
- (2) $[A] = A$ となるような、40以上50以下の整数Aをすべて答えなさい。
- (3) $[A] \times 2 = A$ となるような、100以下の整数Aをすべて答えなさい。
- (4) $[A] \times 3 = A$ となるような、整数Aのうちで、最も小さいものを答えなさい。
- (5) $[A] \times 97 = A$ となるような、整数Aのうちで、最も小さいものを答えなさい。



素数の個数と素因数分解・1

- (1) $[36] = 24$, $[105] = 105$ (2) 41, 42, 43, 44, 46, 47
 (3) 16, 48, 72, 80 (4) 144 (5) 150544

(1) 次のようになります。

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \text{ より, } [36] = (2 \times 2) \times (3 \times 2) = 24$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7 \text{ より, } [105] = (3 \times 1) \times (5 \times 1) \times (7 \times 1) = 105$$

(2) (1) の $[105]$ の計算から、素因数分解をした場合に、それぞれの素数が1個しか現れない場合は、 $[A] = A$ となるのがわかります。

また、例えば $12 = 2 \times 2 \times 3$ より $[12] = (2 \times 2) \times (3 \times 1) = 12$ となります。このように、素数2については2個現れても 2×2 のままなので、計算の結果が変わりません。

よって、素因数分解をしたときに2は2個まで、他の素数は1個まで現れる数であれば $[A] = A$ となります。40以上50未満で以上の条件を満たすのは、41, 42, 43, 44, 46, 47です。

(3) まず、素因数分解をしたときに2だけが現れる整数を考えてみます。

$$A = 2 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2}{2 \times 1} = 1,$$

$$A = 4 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 1,$$

$$A = 8 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{4}{3},$$

$$A = 16 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 4} = 2,$$

$$A = 32 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{16}{5},$$

このように、素因数分解をしたときに現れる2の個数自体が、2をいくつかかけあわせた数、上の例で

は2個や4個の場合にのみ、 $\frac{A}{[A]}$ は整数となります。2を8個かけあわせた数である256では、

$$\frac{256}{[256]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 8} = 16 \text{ となります。これ以降も同様にして、整数となる}$$

$\frac{A}{[A]}$ は大きくなっていくので、 $\frac{A}{[A]} = 2$ となるのはAが16のときのみです。

こうして、 $A = 16$ のときに $[A] \times 2 = A$ となるわけですが、このことと(2)でわかった、3以上の素数が素因数分解において、それぞれ1個までしか現れない場合には $[A] = A$ となることから、 $16 \times 3 = 48$ 、 $16 \times 5 = 80$ も条件を満たします。

次に、 A を素因数分解したときに2以外のある素数が2個以上現れる場合を考えます。例えば

$$A = 36 \text{ のとき, } \frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} \times \frac{3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{3}{2}$$

れるのは、素因数の2にあたる部分のみです。よって、計算をした結果として $\frac{A}{[A]} = 2$ となるために

は、素因数分解をしたときに2が現れなければならない、さらに、2が1個現れると $\frac{2}{2} = 1$ 、2個現れる

と $\frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 1$ となることから、 $\frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$ となる3個以上の場合を考えます。分母の3を払う必要

があることから、

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{3 \times \dots}{3 \times \square} \times \dots$$

となります。この形を満たして計算結果が2となる場合として、まずは

$$\frac{A}{[A]} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{3 \times 3}{3 \times 2} = 2 \text{ のときの } A = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \text{ があります。}$$

これ以外の場合は、3以上の素数が現れる回数を増やすことになるので、100をこえてしまいます。よって、72のみが条件を満たします。

以上より、16、48、72、80が答えとなります。

(4) (3) より, $\frac{A}{[A]} = 3$ となるためには, A を素因数分解したときに 3 が少なくとも 2 個現れなければなりません。

$$\frac{A}{[A]} = \dots \times \frac{3 \times 3 \times \dots}{3 \times \square} \times \dots$$

上の式の形を満たす最小の整数は 9 で, このとき,

$$\frac{9}{[9]} = \frac{3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{3}{2} \text{ となります。} \frac{3}{2} \text{ を } 2 \text{ 倍すれば } 3 \text{ となるわけですが, ここで (3) の } \frac{16}{[16]} = 2$$

を利用します。素因数分解をしたときに 9 は 3 だけが現れ, 16 は 2 だけが現れるので,

$$9 \times 16 = 144 \text{ について, } \frac{144}{[144]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 4} \times \frac{3 \times 3}{3 \times 2} = 3 \text{ となります。}$$

よって, $A = 144$ です。

(5) 97 は素数なので, (4) と同様に考えて, $97 \times 97 \times 16 = 150544$ について,

$$\frac{150544}{[150544]} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 4} \times \frac{97 \times 97}{97 \times 2} = 97 \text{ となります。}$$

よって, $A = 150544$ です。