受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

山脈の切断・２

　すべての面が正三角形でできている三角すいを，正四面体といいます。図１，２はどちらも正四面体を４個底面の辺が重なるように組み合わせた立体を表しています。図１では点Ａ，Ｂは正四面体の辺を１：１に分け，図２では３：１に分けています。

図１

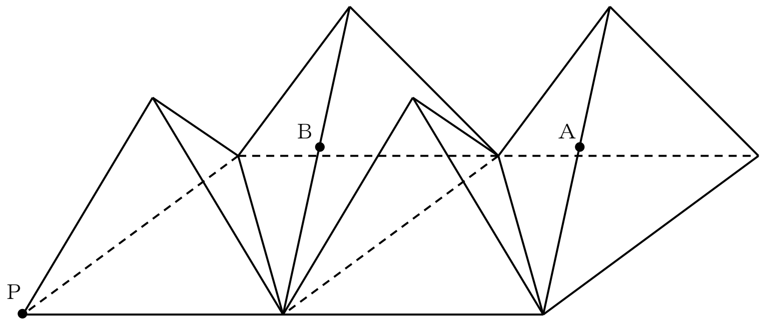
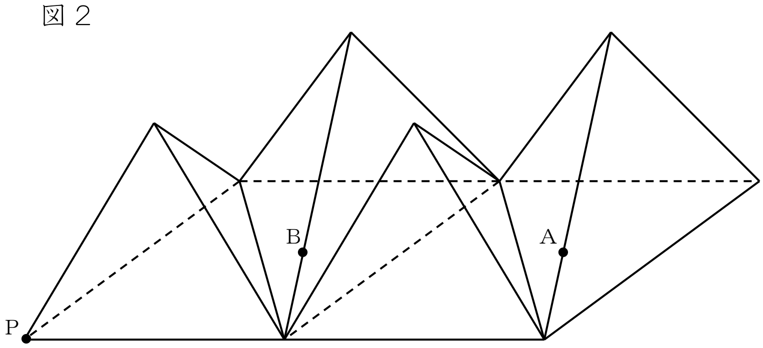


図２



（１）図１において，２点Ａ，Ｂを通過し，底面に垂直な平面で立体を切断しました。このとき，頂点Ｐを含む立体の体積は，正四面体１個の体積の何倍ですか。

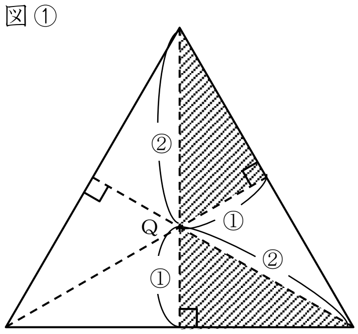
（２）図２において，２点Ａ，Ｂを通過し，底面に垂直な平面で立体を切断しました。このとき，頂点Ｐを含む立体の体積は，正四面体１個の体積の何倍ですか。

最難関問題

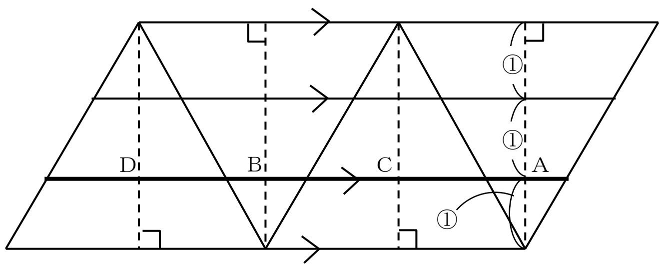
山脈の切断・２　（１）$1\frac{2}{9}$倍　（２）$\frac{29}{72}$倍

（１）正四面体の頂点から底面に向けて垂直な線を引き，底面と交わる点をＱとすると，点Ｑは図①のように，正三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ３本の直線が交わる点と一致します。このとき，斜線で示した三角形は９０度・６０度・３０度の三角定規形の直角三角形になるので，図①のような長さの比が成り立ちます。よって，切断面を真上から見ると，図②の太線のようになり，点Ｃと点Ｄは正四面体の頂点にあたります。

図①

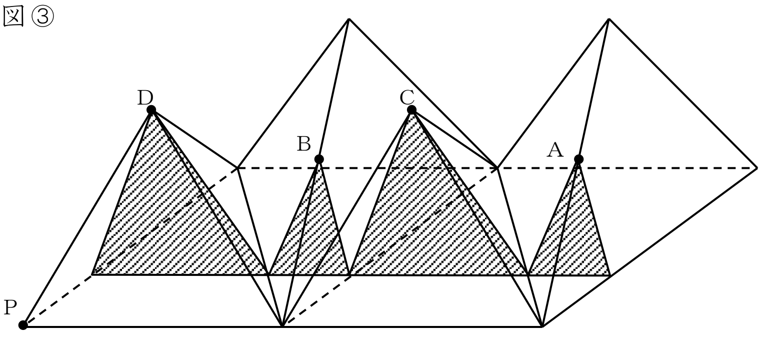


図②



見取り図で表すと，切断面は図③のようになります。

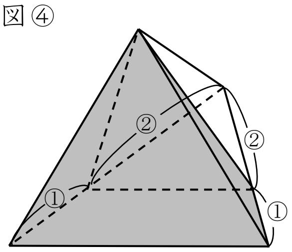
図③



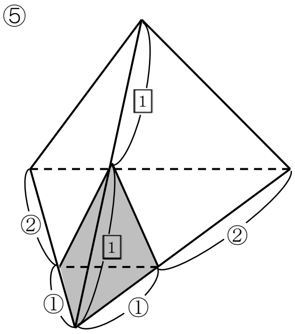
最難関問題

　このとき，頂点Ｐを含む立体は，図④と⑤で影をつけた立体をそれぞれ２個組み合わせた形となります。

図④



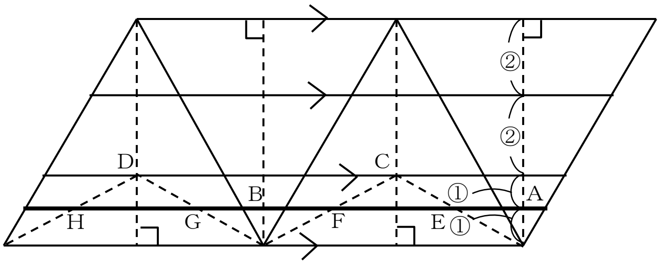
図⑤



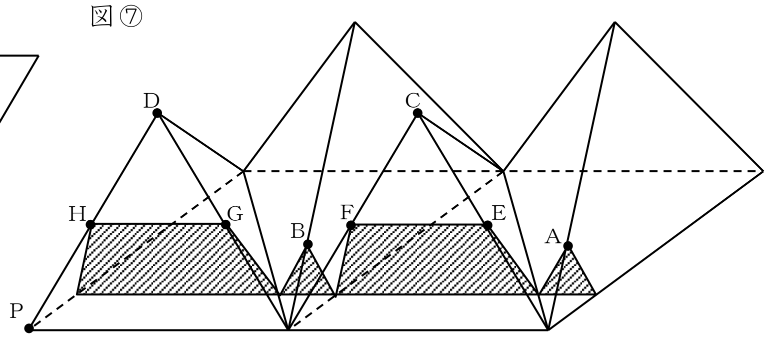
図④の立体は，底面積が正四面体の$1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$（倍）なので，体積も$\frac{5}{9}$倍です。また，図⑤の立体は体積が正四面体の$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$（倍）です。よって，頂点Ｐを含む立体の体積は，正四面体の$\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{18}\right)\times2=1\frac{2}{9}$（倍）です。

（２）切断面を真上から見ると，図⑥の太線のようになり，点Ｃと点Ｄは正四面体の頂点にあたります。よって，見取り図においては切断面は図⑦のようになります。

図⑥



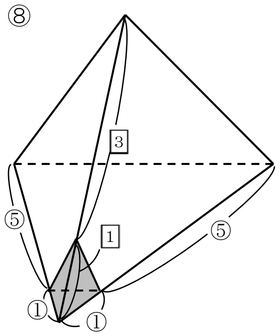
図⑦



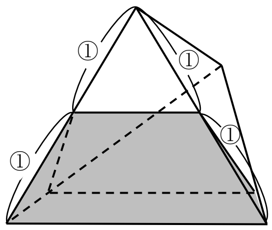
最難関問題

このとき，頂点Ｐを含む立体は，図⑧と⑨で影をつけた立体をそれぞれ２個組み合わせた形となります。

図⑧

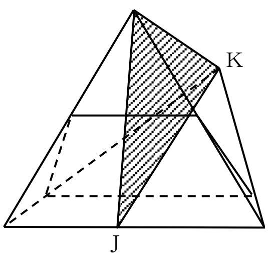


図⑨

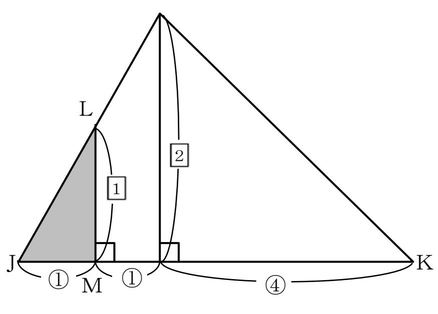


図⑧の立体は体積が正四面体の$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{144}$（倍）です。図⑨の立体については，図⑩，⑪のように正四面体の頂点Ｉ，Ｋを通って底面に垂直な面を考えます。三角形ＩＪＫと図⑨の立体が交わってできる三角形ＬＪＭの面積は，三角形ＩＪＫの面積の，$\frac{1}{1+1+4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$（倍）です。ここで，三角形ＩＪＫを底面としたときの正四面体の高さを図⑫のように⑥とし，三角形ＩＪＫの面積を１とすると，正四面体の体積は$1\times6\times\frac{1}{3}=2$，図⑨で影をつけた立体の体積は，$\frac{1}{12}\times\frac{6+5+3}{3}=\frac{7}{18}$となるので，$\frac{7}{18}\div2=\frac{7}{36}$（倍）です。

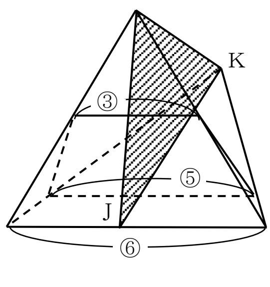
図⑩



図⑪



図⑫



以上より，頂点Ｐを含む立体の体積は，正四面体の（$\frac{1}{144}+\frac{7}{36}$）$\times2=\frac{29}{72}$（倍）です。