受験算数の基礎

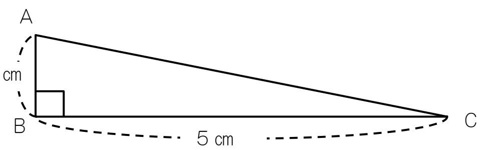
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

３辺が整数比の直角三角形・１（改訂）

（１）図１のように，直角をはさむ２つの辺の長さが１㎝と５㎝である直角三角形ＡＢＣがあります。方眼上にこの三角形をかいたのが，図２です。図２の方眼の交点上に点Ｐをとり，辺ＡＣを底辺とする二等辺三角形ＡＣＰを１つ作図しなさい。定規やコンパスを用いてはいけません。

図１



（２）図３に，辺ＢＰとＣＰの長さが㎝の単位で整数となるような直角三角形ＢＣＰを作図しなさい。定規やコンパスを用いてはいけません。

図２

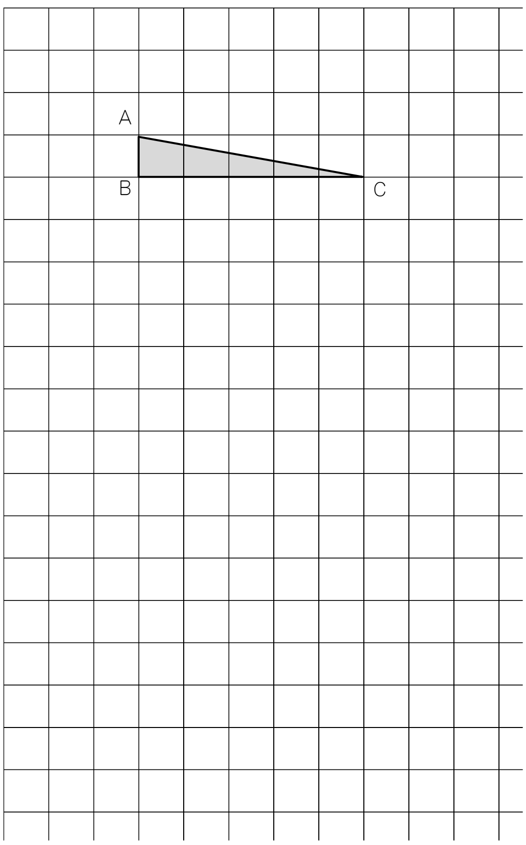
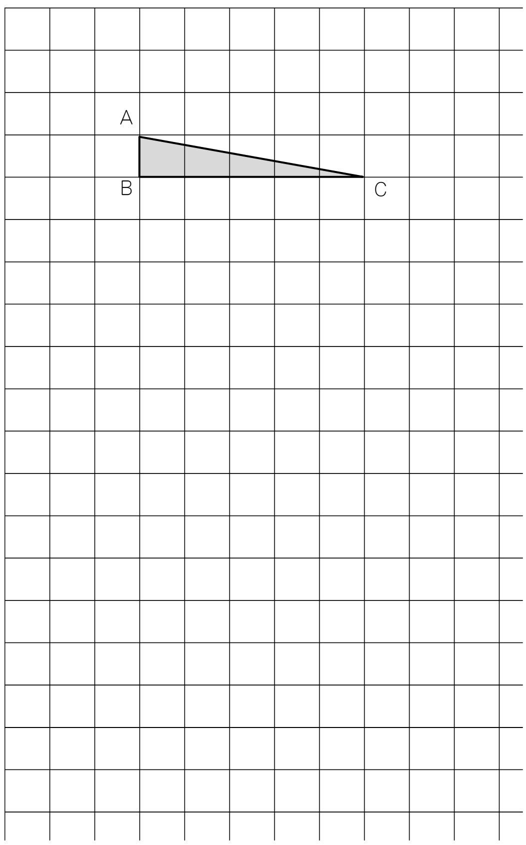


図３

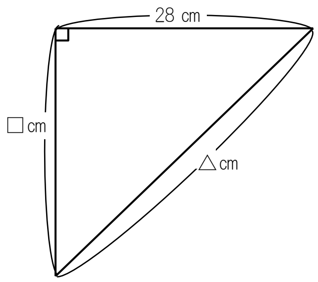


（問題は次のページに続きます）

最難関問題

（３）図４の直角三角形において，□と△にあてはまる数の差は８です。□と△にあてはまる数の組を答えなさい。

図４



（４）直角三角形の３辺の長さの比として考えられる整数比を，２つ答えなさい。
ただし，３：４：５，５：１２：１３，８：１５：１７および（３）の答えと等しいものは除きます。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

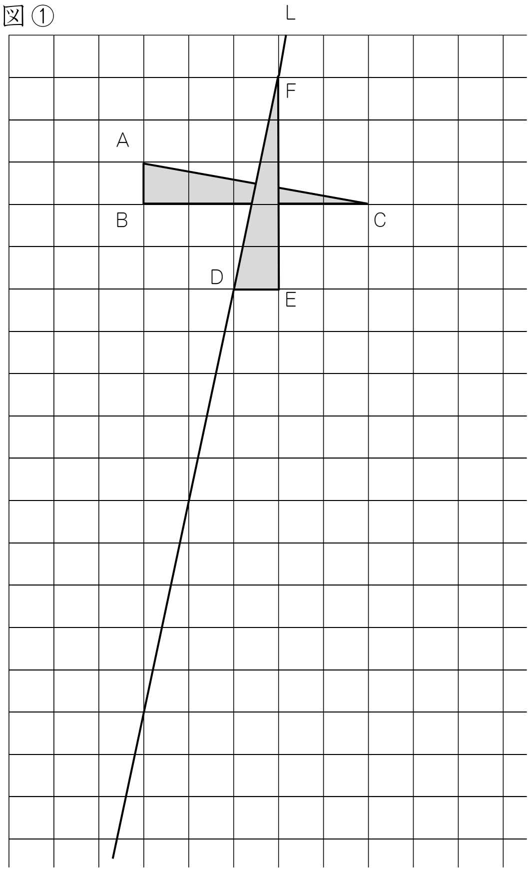
３辺が整数比の直角三角形・１（改訂）

（１）図②参照　（２）図③参照　（３）（□，△）＝（４５，５３）　（４）解説参照

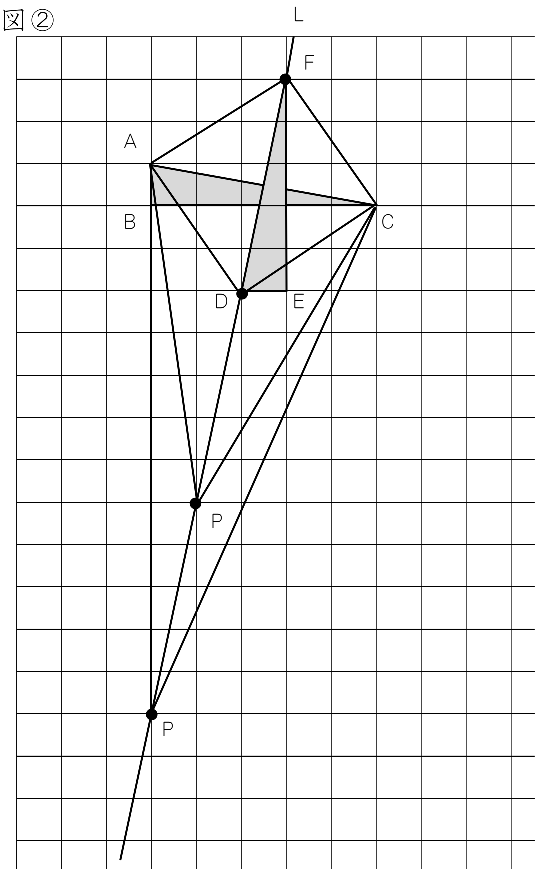
（１）図①のように三角形ＡＢＣと合同な三角形ＤＥＦを組み合わせると，辺ＡＣと辺ＤＦが互いの中点で垂直に交わります。辺ＤＦをのばした直線Ｌは５マス下に下がると１マス左に進むという傾きになります。Ｌ上の１点と頂点Ａ，Ｃを結んでできる三角形はすべて辺ＡＣを底辺とする二等辺三角形になります。

よって，図②の三角形ＡＣＦ，ＡＣＤ，２つのＡＣＰという４つの三角形のうちひとつをかけば正解となります。

図①



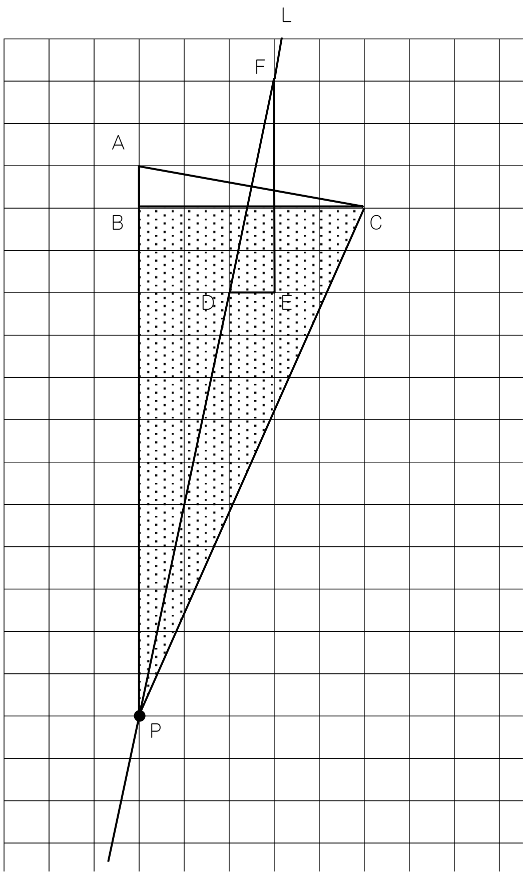
図②



最難関問題

（２）ＡＣを底辺とする二等辺三角形ＡＣＰのうちで，点Ｐを図③の位置にとったものを利用すると，三角形ＢＣＰと三角形ＧＰＣが，最も短い辺の長さが５㎝の直角三角形になります。ＢＰ＝ＧＣ＝１２㎝，三角形ＡＣＰが二等辺三角形であるため，ＰＣ＝ＰＡ＝１３㎝となるため，３辺の長さが㎝の単位で整数となります。

図③



最難関問題

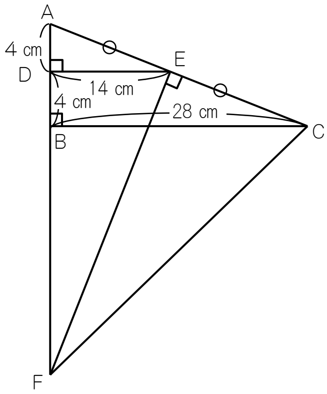
（３）（２）と同様にして，図④のＡＢ＝８㎝，ＢＣ＝２８㎝の直角三角形ＡＢＣを考えます。辺ＡＢの中点をＤ，辺ＡＣの中点をＥとして，ＥからＡＣと垂直に交わる線を引き，辺ＡＢの延長線との交点をＦとします。すると，三角形ＡＣＦはＡＦ＝ＣＦの二等辺三角形になります。また，

ＤＥ＝２８×$\frac{1}{2}$＝１４（㎝）です。

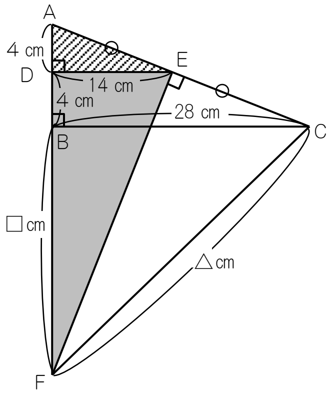
図⑤の三角形ＡＤＥとＥＤＦの相似により，ＤＦの長さは１４×$\frac{１４}{4}$＝４９（㎝）なので，

□＝４９－４＝４５，△＝４９＋４＝５３です。

図④



図⑤



最難関問題

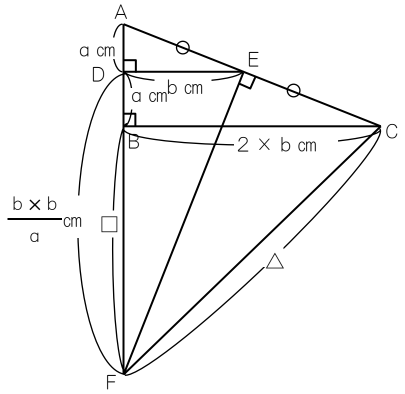
（４）（３）と同様にして，ＡＢとＢＣの長さを決めれば，三角形ＢＣＦの３辺の長さを求めることができます。ＡＢとＢＣが整数であっても，ＢＦとＣＦは小数や分数になることがありますが，整数比を求めることは可能です。

以下では，式を用いて整数比を表してみます。図⑥のようにａ，ｂの長さをきめます。ＤＦの長さは，$b \times \frac{b}{a} = \frac{b \times b}{a}$（cm）となるので，$\square = \frac{b \times b}{a} - a$（cm），$\triangle = \frac{b \times b}{a} + a$（cm）です。

$$(2 \times b) : \left(\frac{b \times b}{a} - a\right) : \left(\frac{b \times b}{a} + a\right) = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$$

となるので，ａ＜ｂとなる２つの整数ａ，ｂから，以下の表のような整数比を求めることができます。

図⑥



a	b	２×ａ×ｂ	ｂ×ｂ－ａ×ａ	ｂ×ｂ＋ａ×ａ
1	2	4	3	5
1	3	6	8	１０
1	4	8	１５	１７
2	3	１２	5	１３
2	5	２０	２１	２９
2	7	２８	４５	５３
3	4	２４	7	２５