最難関問題

数表とフェルマーの小定理

　あるきまりにしたがって，整数が下の表のように並んでいます。この表の，上から□番目，左から△番目の数を（□，△）で表します。例えば，（３，４）は８１です。

1	1	1	1	1	1	1	…
2	4	8	１６	３２	６４	…	
3	9	２７	８１	２４３	…		
4	１６	６４	２５６	…			
5	２５	１２５	…				
6	３６	…					
7	…						
…							

（１）（２３９，３）を４７で割った余りを答えなさい。

（２）次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$にあてはまる整数を答えなさい。$\boxed{\text{ウ}}$にあてはまる整数はいくつもありますが，最も小さいものを答えなさい。

> 　４の倍数４，８，１２，１６，２０，…を順に４７で割ってできる余りを並べていくと，
> ４，８，１２，１６，２０，…となります。この余りの数の列において，初めて０が現れるのは左から$\boxed{\text{ア}}$番目，初めてすでに並んでいる数と同じ数が現れるのは左から$\boxed{\text{イ}}$番目です。このことを利用すると，
> （４×１）×（４×２）×（４×３）×…×（４×$\boxed{\text{ウ}}$）を４７で割った余りは，
> １×２×３×…×$\boxed{\text{ウ}}$を４７で割った余りと等しくなります。
> 　よって，（４，$\boxed{\text{ウ}}$）を４７で割った余りは$\boxed{\text{エ}}$です。

（３）（１９１，１９１）を４７で割った余りを答えなさい。

最難関問題

フェルマーの小定理

（１）１７　（２）ア＝４７，イ＝４８，ウ＝４６，エ＝１　（３）２５

（１）２３９÷４７＝５余り４となって，２３９は４７で割ると４余る整数です。
（２３９，３）＝２３９×２３９×２３９ですが，これを４７で割った余りは４×４×４＝６４を４７で割った余りと等しくなります。よって，６４÷４７＝１余り１７より，１７です。

（２）４７は素数であり，４７より小さい数とは互いに素となるので，４と４７の最小公倍数は４×４７です。よって，アは４７です。

次に，２個の４の倍数を４７で割ったときの余りが等しくなるということは，２個の４の倍数の差が４７の倍数になるときです。これを満たす最小の組みあわせは，４×１と４×４８ですから，イは４８です。このことから，（４×１），（４×２），…，（４×４６），（４×４７）という４の倍数を４７で割った余りはすべて異なり，（４×４７）を４７で割った余りは０なので，
（４×１）～（４×４６）を４７で割った余りは，並び順は異なるものの１～４６になります。よって，
（４×１）×（４×２）×…×（４×４６）を４７で割った余りは，
１×２×…×４６を４７で割った余りと等しくなるので，ウは４６です。

（４，４６）は４を４６個かけあわせた数ですから，
（４×１）×（４×２）×…×（４×４６）÷（１×２×…×４６）と等しくなります。これは，
（１×２×…×４６）÷（１×２×…×４６）＝１と，４７で割ったときの余りが等しくなるので，
エは１です。

以上より，互いに素である整数□と素数△（（２）では□＝４，△＝４７）について，□を（△－１）個かけあわせた数を△で割った余りが１であることがわかります。これを，「フェルマーの小定理」といいます。

最難関問題

（３）表にならぶ整数を，４７で割ったときの余りに書き換えると，次のようになります。

46 マス

47 マス

1	1	1	1	1	…	…	1	1	1
2	4	8	16	32			1	2	4
3	9	27	34				1	3	9
4	16	17					1	4	16
5	25						1	5	25
…							…	…	…
…							…	…	…
46	…	…	…	…	…	…	1	46	…
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	…	…	1	1	
2	4	8	16	32					

左から４６列目には，４７を整数倍した段を除いて，１が並びます。よって，左から４７列目は，一番左の列とまったく同じ数の並びになります。こうして，影をつけたたて４７マス・横４６マスの数の並びが表全体で繰り返されることになります。

１９１÷４７＝４余り３，１９１÷４６＝４余り７より，（１９１，１９１）を４７で割った余りは，（３，７）を４７で割った余りと等しくなります。上から３段目を４７で割った余りは，順に，
３，９，２７，
８１÷４７＝１余り３４，
３４×３÷４７＝２余り８，
８×３÷４７＝０余り２４，
２４×３÷４７＝１余り２５，となるので，２５が答えとなります。