受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

近さの範囲・正四面体

図１の三角すいＡＢＣＤは,すべての面が正三角形でできている正四面体です。以下の問いに答えなさい。

図１

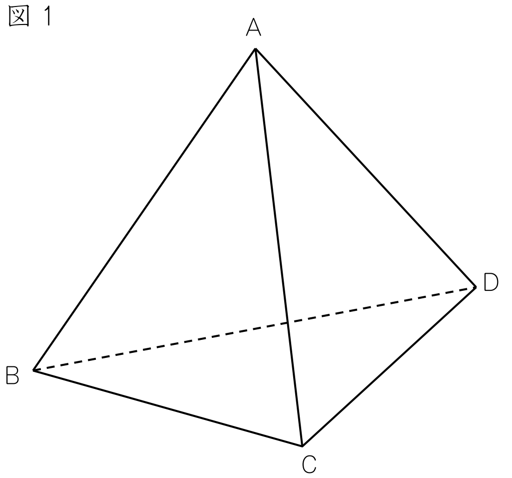
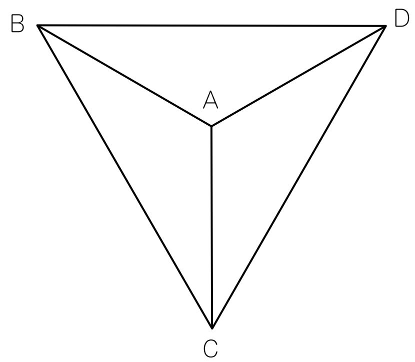


図２

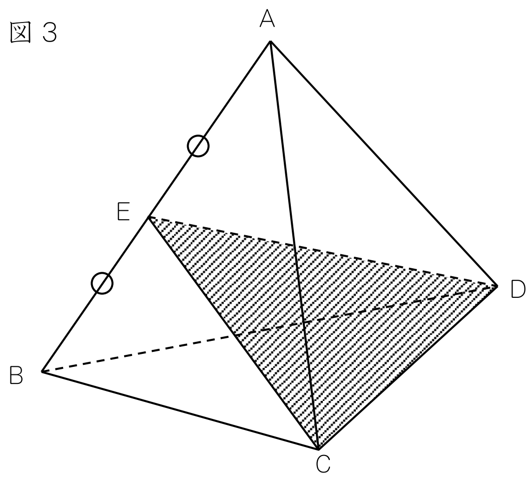


（１）正四面体において，もっとも近い頂点がＡである部分を，立体Ｘとします。立体Ｘは，どのような面を持つ立体ですか。「二等辺三角形が３個，四角形が４個」のような仕方で答えなさい。

（２）正四面体を真上から見ると，図２のようになります。ここに立体Ｘを斜線でかきこみます。かきこんだ斜線部分の面積は正三角形ＢＣＤの面積の何倍になりますか。

（３）図３のように，辺ＡＢの中点をＥとします。正三角形ＡＢＣの面積を○，斜線で示した三角形ＥＣＤの面積を□として，立体Ｘの表面積を式で表しなさい。

図３

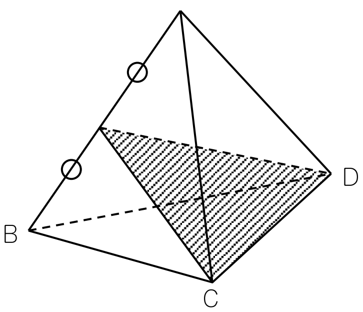


最難関問題

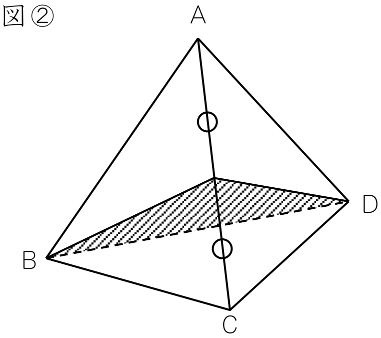
近さの範囲・立方体と直方体　（１）四角形が６個　（２）$\frac{1}{3}$倍　（３）○＋$\frac{1}{2}$×□

（１）頂点Ａに近い部分と頂点Ｂに近い部分は，図①の平面によって分けられます。同様にして，頂点Ａと頂点Ｃは図②，頂点Ａと頂点Ｄは図③のように分けられます。よって，正四面体ＡＢＣＤをこの３つの平面によって切断したときに頂点Ａを含む部分が，求める立体Ｘです。

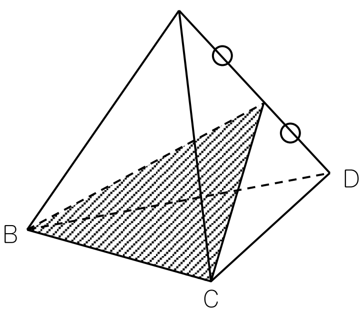
図①



図②

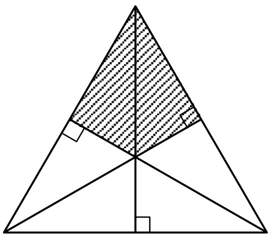


図③

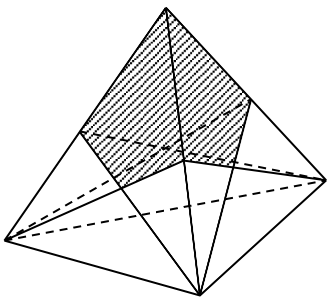


このとき，正四面体の面ＡＢＣ，ＡＣＤ，ＡＤＢにおいて立体Ｘと重なる部分は，図④の斜線部分のようになります。よって，立体Ｘの「上の部分」は，図⑤のようになります。

図④



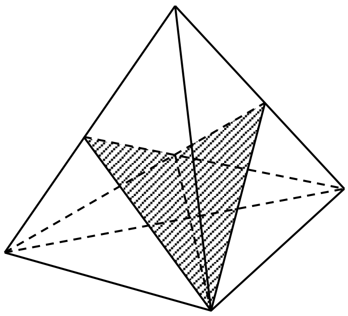
図⑤



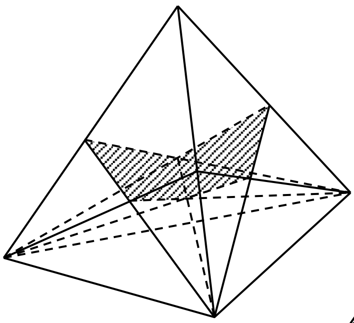
最難関問題

次に，立体Ｘの「下の部分」を考えます。図①と③の平面を重ねると，図⑥のようになります。ここに図②を加えると，立体Ｘの下の部分は図⑦のようになります。よって，立体Ｘ全体は図⑧，⑨のようになるので，「四角形が６個」です。

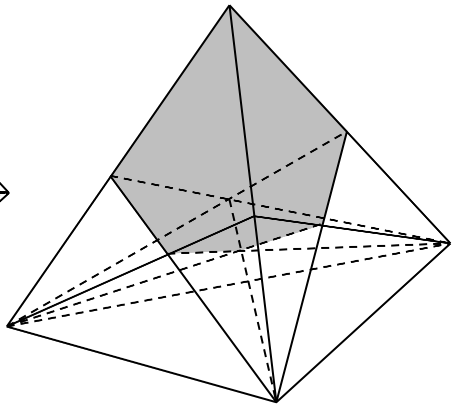
図⑥



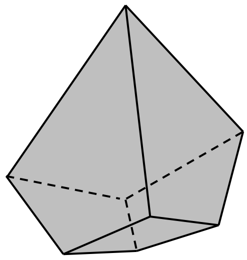
図⑦



図⑧

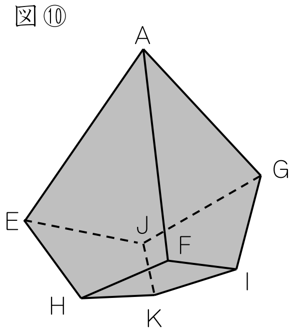


図⑨

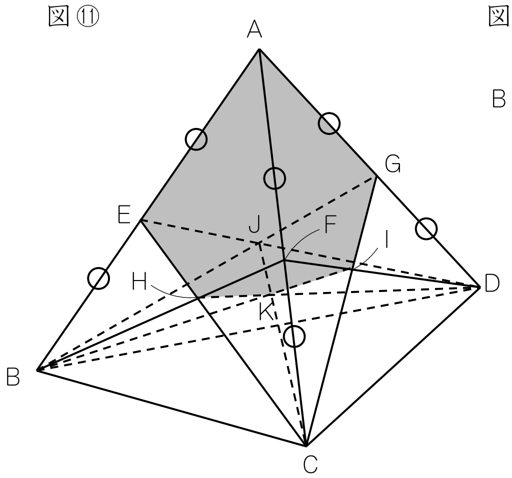


（２）図⑨に図⑩のように頂点名をふります。これを図⑧にかきこむと，図⑪のようになります。頂点Ｅは辺ＡＢの中点，頂点Ｆは辺ＡＣの中点，頂点Ｇは辺ＡＤの中点ですから，真上から見ると図⑫のようになります。

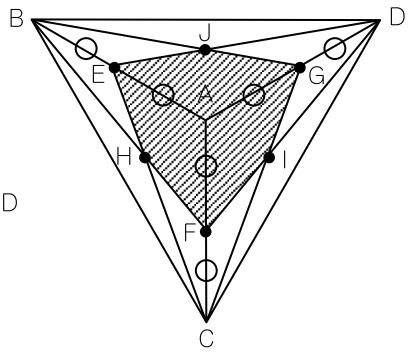
図⑩



図⑪



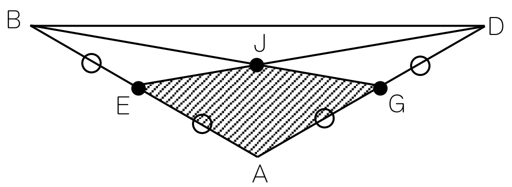
図⑫



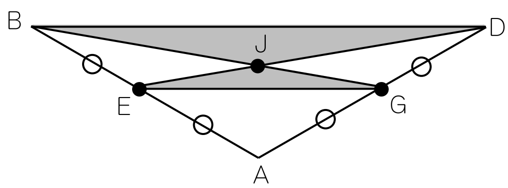
最難関問題

図⑫の斜線部分が正三角形ＢＣＤの面積であるかは，図形の対称性より，図⑬の四角形ＡＧＪＥが三角形ＡＤＢの面積の何倍であるかを考えることで求めることができます。図⑭のように三角形ＢＪＤとＧＪＥの相似に注目をすると，相似比は２：１であることから，ＢＪ：ＪＧ＝２：１です。よって，三角形ＢＪＥの面積は三角形ＡＤＢの面積の$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$（倍），三角形ＢＧＤの面積は三角形ＡＤＢの面積の$\frac{1}{2}$倍であることから，四角形ＡＧＪＥの面積は三角形ＡＤＢの面積の，$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$（倍）です。

図⑬

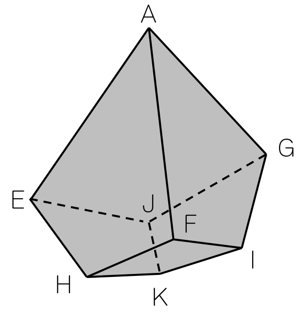


図⑭



よって，図⑫において，斜線部分の面積は正三角形ＢＣＤの面積の$\frac{1}{3}$倍です。

最難関問題

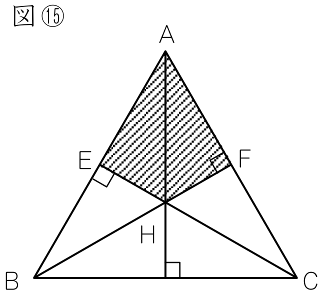


（３）立体Ｘの上の部分，つまり四角形ＡＥＨＦ，ＡＦＩＧ，ＡＧＪＥについては，図⑮のようになるので，それぞれが正三角形ＡＢＣの面積の$\frac{1}{3}$倍です。

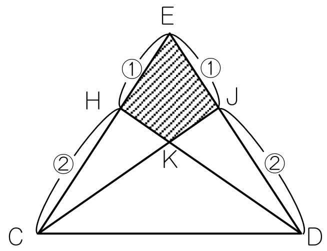
よって，３つあわせた面積は，$\frac{1}{3}$×○×３＝○となります。

次に，立体Ｘの下の部分，つまり四角形ＥＨＫＪ，ＦＩＫＨ，ＧＪＫＩについては，図⑭よりＥＪ：ＪＤ＝１：２となるので，図⑯のようになります。図⑰のように三角形ＨＫＪとＤＫＣは１：３の相似なので，ＨＫ：ＫＤ＝１：３です。よって，三角形ＤＫＪの面積は三角形ＥＣＤの面積の$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$（倍），三角形ＣＤＨの面積は三角形ＥＣＤの面積の$\frac{2}{3}$倍であることから，四角形ＡＧＪＥの面積は三角形ＡＤＢの面積の，$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$（倍）です。３つあわせると，$\frac{1}{6}$×□×３＝$\frac{1}{2}$×□となります。

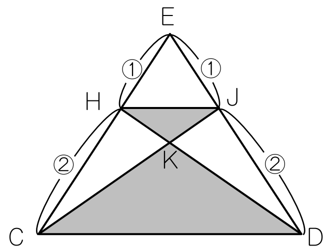
図⑮



図⑯



図⑰



以上より，立体Ｘの表面積は，○＋$\frac{1}{2}$×□です。