

最難関問題

直線が通過する点の個数・3

4 4 1 個の点が等間隔に、図 1 のようにたて横 2 1 列に並んでいます。図 2 のように、そのうちの 4 点を結ぶ直線を引きます。このとき、他の点を直線が通過しないようにします。

このような直線は何本引くことができますか。なお、直線とは無限にまっすぐ延びる線です。

図 1

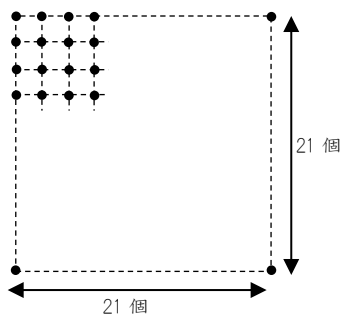
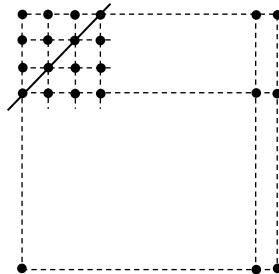


図 2



最難関問題

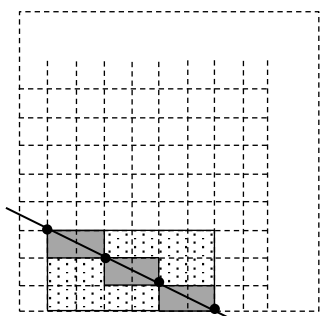
直線が通過する点の個数・3 1 3 9 2 本

点が1 cm間隔で並んでいることにします。問題中の図2の直線は、図①のように、たて3 cm、横3 cmの長方形（この場合は正方形）の対角線です。直線が4点のみを通過する条件は、以下の2つです。

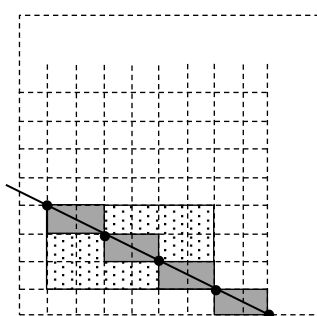
○図①のように、長方形のたてと横の長さの最大公約数が3であること。図①の例では縦1 cm、横2 cmの小長方形が3個連なっています。

○図②のように、長方形の外側に小長方形が連なるといことがないこと。

図①



図②



このような条件を満たす長方形の置き方に注目して、場合分けをします。また、図①、②のように、長方形のたてよりも横が長く、直線が右下がりの場合のみを考え、最後に4倍して答えを求めることにし、その際に問題中の図2にある、1辺3 cmの正方形の対角線の4本を加えます。

たて3 cmの場合

○横6 cm…図③では、たて1 cm横2 cmの長方形の左上の頂点を置ける位置を●で表しています。ずらして2通り、上下で2通りなので、 $2 \times 2 = 4$ （通り）です。

○横9 cm…同様にして、 $3 \times 2 = 6$ （通り）です。

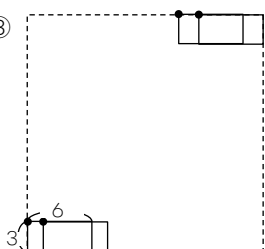
○横12 cm…同様にして、 $4 \times 2 = 8$ （通り）です。

○横15 cm…たて1 cm、横5 cmの長方形が全体の正方形からはみ出す場合を考えることができます。

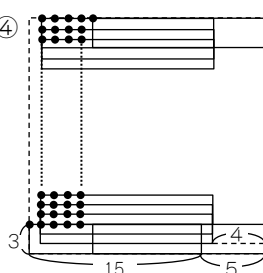
20 - 15 = 5 (cm) であることから、長方形の両側を1 cmと4 cmか、2 cmと3 cmにすると、図④のように最上段・最下段以外にも長方形を配置できるので、 $5 \times 2 + 4 \times 16 = 74$ （通り）です。

○横18 cm…たて1 cm、横6 cmの長方形は必ずはみ出すので、図⑤のように $3 \times 18 = 54$ （通り）です。あわせて、 $4 + 6 + 8 + 74 + 54 = 146$ （通り）です。

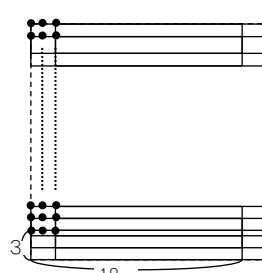
図③



図④



図⑤



最難関問題

たて 6 cm の場合

- 横 9 cm…図⑥のように、 $3 \times 2 \times 2 = 6$ （通り）です。
- 横 15 cm…図④の場合と同様で、図⑦のようになります。
 $5 \times 2 \times 2 + 4 \times 11 = 64$ （通り）です。
 あわせて、 $6 + 64 = 70$ （通り）です。

たて 9 cm の場合

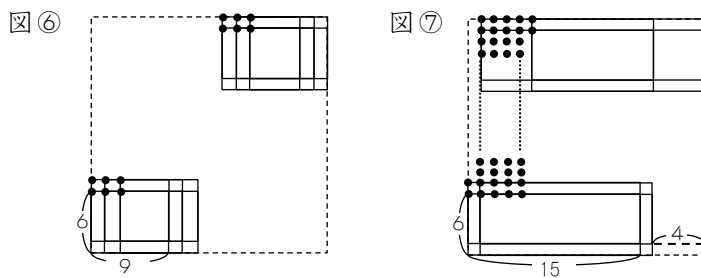
- 横 12 cm…図⑥の場合と同様で、 $4 \times 3 \times 2 = 24$ （通り）です。
- 横 15 cm…図④，⑦の場合と同様で、 $5 \times 3 \times 2 + 4 \times 6 = 54$ （通り）です。
 あわせて、 $24 + 54 = 78$ （通り）です。

たて 12 cm の場合

- 横 15 cm…図④，⑦の場合と同様で、 $5 \times 4 \times 2 + 4 \times 1 = 44$ （通り）です。

たて 15 cm の場合

- 横 18 cm…図⑤の場合と同様で、 $3 \times 3 = 9$ （通り）です。



以上より、 $146 + 70 + 78 + 44 + 9 = 347$ ， $347 \times 4 + 4 = 1392$ （本）です。