最難関問題

桁入れ替えと８の倍数

　０から９までの１０個の数から６個の数を並べて，６桁の整数Ａを作ります。そして，整数Ａを２けたずつ区切って並びかえます。例えば，１２３４５６であれば$\boxed{12}$ $\boxed{34}$ $\boxed{56}$と区切って並びかえるので，１２５６３４，３４１２５６，３４５６１２，５６１２３４，５６３４１２の５つの並びかえが可能です。
また，２７１８０９の場合は，０が一番上の十万の位にくることはできないので，
２７０９１８，１８２７０９，１８０９２７の３つの並びかえが可能です。
　整数Ａが８の倍数であり，このような並びかえを行っても８の倍数であるとき，整数Ａとして考えられる数は全部で何通りありますか。

最難関問題

桁（けた）入れ替えと８の倍数　　１８２通り

８の倍数は必ず４の倍数です。４の倍数は下２桁が４の倍数なので，整数Ａ＝$\boxed{\text{アイ}}$ $\boxed{\text{ウエ}}$ $\boxed{\text{オカ}}$とすると，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オカ}}$はいずれも４の倍数です（０４，０８も含めます）。ここで，$\boxed{\text{オカ}}$が２８のように８の倍数ではない４の倍数の場合と，３２のような８の倍数の場合を考えます。

$\boxed{\text{アイ}}$ $\boxed{\text{ウエ}}$ $\boxed{２８}$のとき，エは奇数になります。というのも，８の倍数は下３桁が８の倍数であり，１００，３００，５００，７００，９００は８の倍数ではない４の倍数なので，８で割ると４余ります。余った４を２８のような８の倍数ではない４の倍数に加えると，８の倍数になるので，割り切れます。ところがエは偶数でないとならないので，$\boxed{\text{オカ}}$が８の倍数ではない４の倍数であるということは，ありえません。

それに対して，$\boxed{\text{アイ}}$ $\boxed{\text{ウエ}}$ $\boxed{３２}$のとき，エは０も含めた偶数になります。０００，２００，４００，６００，８００は８で割り切れます。また，下２けたも８の倍数なので，８で割り切れます。こうして，$\boxed{\text{オカ}}$は８の倍数です。また，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オカ}}$を並びかえても同じことが成り立たなければならないので，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オカ}}$はいずれも８の倍数です。

２けたの８の倍数は，一の位に注目して分けると，同じ数を２個使っている００と８８を除いて，以下のようになります。

$\underline{4,8}\,0$　$\underline{3,7}\,2$　$\underline{2,6}\,4$　$\underline{1,5,9}\,6$　$\underline{0,4}\,8$

これらの組み合わせで場合分けをします。

$\boxed{\text{一の位が０・２・４}}$

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{\ \ 8}\,0$　$\underline{3,7}\,2$　$\underline{\ \ 6}\,4$

十の位の数の組み合わせは，１×２×１＝２（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえが３×２×１＝６（通り）あるので，２×６＝１２（通り）です。

$\boxed{\text{一の位が０・２・６}}$

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{4,8}\,0$　$\underline{3,7}\,2$　$\underline{1,5,9}\,6$

十の位の数の組み合わせは，２×２×３＝１２（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえが６通りあるので，１２×６＝７２（通り）です。

一の位が０・２・８

一の位が０と８の８の倍数は，次のようになるので，必ず数が重複します。

$\underline{4,8}\,0 \qquad \underline{0,4}\,8$

よって，以下では０・８の組み合わせは除外します。

一の位が０・４・６

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{\;\;8\;}\,0 \qquad \underline{\;\;2\;}\,4 \qquad \underline{1,5,9}\,6$

十の位の数の組み合わせは，１×１×３＝３（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえが６通りあるので，３×６＝１８（通り）です。

一の位が２・４・６

数の重複を避けると，次のように一の位が４である８の倍数が作れないので，成り立ちません。

$\underline{3,7}\,2 \qquad \underline{\quad\;}\,4 \qquad \underline{1,5,9}\,6$

一の位が２・４・８

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{3,7}\,2 \qquad \underline{6\;\;}\,4 \qquad \underline{0\;\;}\,8$

十の位の数の組み合わせは，２×１×１＝２（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえは，０８が一番上の位にくることはないので，４通りです。よって，２×４＝８（通り）です。

一の位が２・６・８

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{3,7}\,2 \qquad \underline{1,5,9}\,6 \qquad \underline{0,4}\,8$

一の位が８の数が０８と４８の場合で並びかえが異なるので，分けて考えます。どちらの場合も使う数の組み合わせは，２×３×１＝６（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえは，０８の場合は４通り，４８の場合は６通りあるので，６×４＋６×６＝６０（通り）です。

一の位が４・６・８

数の重複を避けると，次のようになります。

$\underline{\ 2\ }4\quad \underline{1,5,9}6\quad \underline{\ 0\ }8$

十の位の数の組み合わせは，１×３×１＝３（通り）あり，３つの８の倍数の並びかえは，０８が一番上の位にくることはないので，４通りです。よって，３×４＝１２（通り）です。

以上より，１２＋７２＋１８＋８＋６０＋１２＝１８２（通り）です。