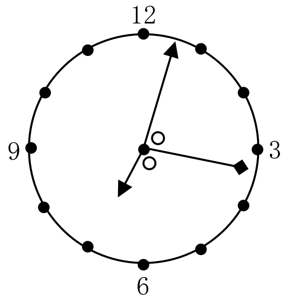
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

秒針と等間隔・１

１～１２の目盛りと，短針，長針，秒針の３本の針がある時計があります。下の図のように，秒針が短針と長針のちょうど真ん中にくる場合を考えます。



（１）１２時ちょうどを過ぎてから，最初に秒針が短針と長針のちょうど真ん中にくるのは，１２時何分ですか。また，その次に秒針が短針と長針のちょうど真ん中にくるのは，１２時何分ですか。

（２）秒針が短針と長針のちょうど真ん中にくる時刻には，どのようなきまりがあるか，かんたんに述べなさい。

（３）秒針が短針と長針のちょうど真ん中にあるときに，短針といずれかの目盛りが作る角は，もっとも小さくて何度ですか。また，そのときの時刻は何時何分何秒ですか。考えられるものをすべて答えなさい。

（４）秒針が短針と長針のちょうど真ん中にあるときに，短針と秒針が作る小さいほうの角の大きさとして考えられるもののうちで，最も大きいものと最も小さいものは，それぞれ何度ですか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

秒針と等間隔・1

（１）１２時$\dfrac{720}{1427}$分，１２時$1\dfrac{13}{1427}$分

（２）$\dfrac{720}{1427}$分ごとに秒針は短針と長針の真ん中にくる

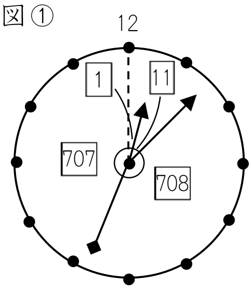
（３）$\dfrac{30}{1427}$度，１時０分$2\dfrac{746}{1427}$秒，１０時５９分$57\dfrac{681}{1427}$秒

（４）$179\dfrac{1247}{1427}$度，$\dfrac{360}{1427}$度

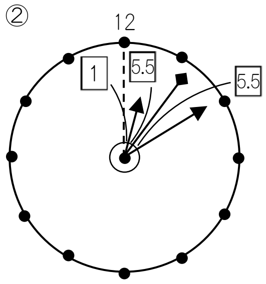
（１）短針，長針と秒針の速さの比は，１：１２：７２０です。１２時ちょうどを過ぎてから最初に秒針が短針と長針の真ん中にくるときに短針が$\boxed{1}$度進んでいるとすると，長針は短針より$\boxed{12}-\boxed{1}=\boxed{11}$（度），秒針は長針より$\boxed{720}-\boxed{12}=\boxed{708}$（度）進んでいます。また，秒針と短針の間の角も$\boxed{708}$度なので，秒針から１２の目盛りまでの角は$\boxed{708}-\boxed{1}=\boxed{707}$（度）です。よって，$\boxed{1}+\boxed{11}+\boxed{708}+\boxed{707}=\boxed{1427}=360$となって，短針は$360\times\dfrac{1}{1427}=\dfrac{360}{1427}$（度）進んでいます。短針は１分で０.５度進むので，$\dfrac{360}{1427}\div0.5=\dfrac{720}{1427}$（分）です。

　次は秒針が時計を１周した後で，図②のようになったときです。$\boxed{720}=360+\boxed{1}+\boxed{5.5}$より，$\boxed{713.5}=360$なので，$\boxed{1427}=720$となって，短針は１２時ちょうどから$\boxed{1}=\dfrac{720}{1427}$（度）進んでいます。よって，$\dfrac{720}{1427}\div0.5=1\dfrac{13}{1427}$（分）です

図①



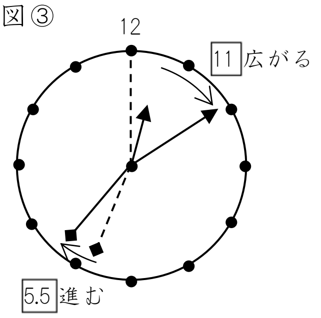
図②



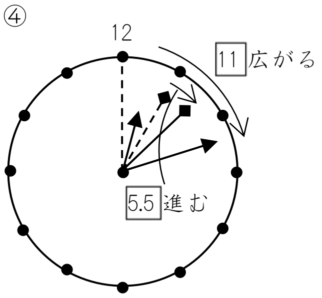
最難関問題

（２）短針を止めて，長針が$\boxed{12}-\boxed{1}=\boxed{11}$（度）進む間に秒針は$\boxed{720}-\boxed{1}=\boxed{719}$（度）進むと考えると，次のようになります。図①の状態の次に秒針が短針と長針のほぼ反対を指して真ん中にくるとき，図③のように短針と長針の間の角が$\boxed{11}$度広がっているとすると，秒針は（３６０＋$\boxed{5.5}$）度進んでいます。また，図②の状態の次に秒針が短針と長針とほぼ同じ向きを指して真ん中にくるときも，図④のようになって，秒針は（３６０＋$\boxed{5.5}$）度進んでいます。どちらの場合も$\boxed{719}$＝３６０＋$\boxed{5.5}$より，$\boxed{713.5}$＝３６０なので，$\boxed{1427}$＝７２０となって，$\boxed{1}=\frac{720}{1427}$（度）です。図①で短針は１２の目盛りから$\frac{360}{1427}$度，図②では$\frac{720}{1427}$度進んでいるので，結局は短針が$\frac{360}{1427}$度進むごとに秒針は短針と長針の真ん中にくることになります。よって，$\frac{360}{1427}\div 0.5=\frac{720}{1427}$（分）ごとに秒針は短針と長針の真ん中にきます。

図③



図④



最難関問題

（３）（２）は，別の見方をすると，時計を１４２７等分する目盛りをつけた場合に，短針が１目盛り・長針が１２目盛り・秒針が７２０目盛り進むごとに，秒針は短針と長針の真ん中にくるということです。

このとき，時計の本来の目盛りは，１４２７÷１２＝$118\frac{11}{12}$（目盛り）ごとに振られています。

真分数部分の$\frac{11}{12}$に注目をすると，２倍，３倍，…とするごとに$\frac{10}{12}$，$\frac{9}{12}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{6}{12}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{4}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{1}{12}$，０と変化するので，１４２７等分した目盛りに最も近いのは，$\frac{11}{12}$と$\frac{1}{12}$の場合です。どちらの場合も，１４２７等分した目盛りから$\frac{1}{12}$目盛り分離れているので，短針と時計の本来の目盛りの作る角は，

$\frac{360}{1427}\times\frac{1}{12}=\frac{30}{1427}$（度）です。　$118\frac{11}{12}$目盛りは１時ちょうどにあたり，それに最も近いのは短針が１１９目盛りを指すときなので，$\frac{30}{1427}\div 0.5=\frac{60}{1427}$（分）より，

$\frac{3600}{1427}=2\frac{746}{1427}$（秒）たっているため，１時０分$2\frac{746}{1427}$秒です。

　また，真分数部分が$\frac{1}{12}$になるのは，１１時ちょうどのときであり，それより$2\frac{746}{1427}$秒前を求めると，１０時５９分$57\frac{681}{1427}$秒です。

最難関問題

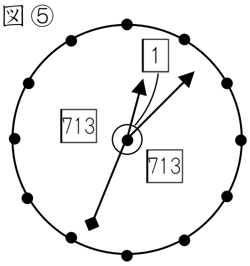
（４）時計を１４２７分割した目盛りにおいて，短針が１目盛り進むごとに長針は１２目盛り進みます。差の１１と１４２７は互いに素ですから，１２時ちょうどから１２時間たって再び２つの針が同じ目盛りを指して重なるまでに，短針と長針の間の目盛りの数は１から１４２６までのすべての値をとります。

短針と秒針の間の目盛りの数が最も多くなるのは，図⑤のように短針と長針が１目盛り離れている場合で，このとき短針と秒針は，（１４２７－１）÷２＝７１３（目盛り）離れています。７１３目盛りは，角度に直すと，$180-\left(360\times\frac{1}{1427}\right)\div 2=179\frac{1247}{1427}$（度）です。

また，短針と秒針の間の目盛りの数が最も少なくなるのは，図⑥のように短針と長針が２目盛り離れている場合で，このとき短針と秒針は，１（目盛り）離れているので，

$360\times\frac{1}{1427}=\frac{360}{1427}$（度）です。

図⑤



図⑥