受験算数の基礎

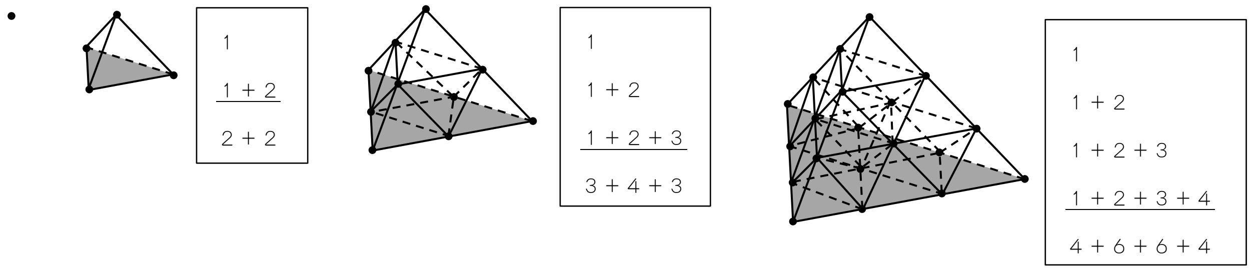
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角すい数とかけ算九九

図１のように等しい大きさの三角すいを積んでいったときの頂点の個数を三角すい数といいます。１番目の三角すい数は１，２番目は４，３番目は１０，４番目は２０です。それぞれの三角すいの底面にあたる正三角形に注目をすると，点の個数は，１個，１＋２＝３（個），１＋２＋３＝６（個），１＋２＋３＋４＝１０（個）というように三角数になっています。このことから，□番目の三角すい数は，□番目までのすべての三角数の和である，ということができます。

図１



太郎君は，三角数の和を求めるために，図１の枠のような計算を考えました。その様子を見ていた次郎君は，図２のような，かけ算九九の表をひろげたものを持ってきました。

図２

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

図２における影をつけたマスの整数は，２つの同じ整数の積になっています。このような数を平方数といいます。２０００以下の平方数をすべて加えると，２９３７０になります。

以上を参考にして，８８番目の三角すい数を求めなさい。

最難関問題

三角すい数とかけ算九九　１１７４８０

　太郎君の計算は，かけ算九九の表において，図①の枠で囲った部分の数の和を求める計算と一致します。というのも，例えば図②の計算における４＋６＋６＋４は，１×４＋２×３＋３×２＋４×１なので，かけ算九九の表のマスを斜めに組み合わせたものになるからです。

　次に，２０００以下の平方数の和が２９３７０であることを，どのように利用するのかを考えます。５番目の三角すい数を求める式である５＋８＋９＋８＋５を図③において考えると，９－８＝１，９－５＝４となって，８も５も中央の数である平方数９との差が，９より小さい平方数に等しくなっています。そのため，５＋８＋９＋８＋５は，９×５－（１＋４）×２＝３５というように計算できます。

図①

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

図②

1

1 + 2

1 + 2 + 3

1 + 2 + 3 + 4

4 + 6 + 6 + 4

図③

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

　２０００以下の平方数のうちで最大のものは，４０×４０＝１６００，５０×５０＝２５００であることから，４０以上５０以下の整数をかけあわせた平方数を考えて，４４×４４＝１９３６，

４５×４５＝２０２５より，４４番目の平方数である１９３６です。４５番目の平方数である２０２５が太郎君の計算式において中央にくるのは，４５×２－１＝８９（番目）の三角すい数ですから，８９番目の三角すい数は，２０２５×８９－２９３７０×２＝１２１４８５です。８８番目の三角すい数はここから８９番目の三角数である，１＋２＋…＋８９＝（１＋８９）×８９÷２＝４００５を引けばよいので，

１２１４８５－４００５＝１１７４８０です。