



平方数・双子素数

(2025, 2027, 2029)は, 3つの連続する奇数の組で, 最も小さい数である2025が平方数で, 残りの数の2027と2029が素数です。このように, 3つの連続する奇数あるいは偶数の組のなかで, 最も小さい数が平方数で, 残りの数が素数であるような組のうち, 3つの整数がどれも2027より小さいものをすべて答えなさい。

平方数・双子素数

$(1, 3, 5), (9, 11, 13), (225, 227, 229), (1089, 1091, 1093)$

偶数の素数は2という1つの整数しか存在しないので、3つの連続する偶数の組が問題の条件を満たす可能性はありません。よって、3つの連続する奇数の組のみを考えると、まず $(1, 3, 5)$ が見つかります。

3と5のように、連続する奇数の素数の組は、「双子素数」といいます。3と5以外の双子素数はどちらも2および3の倍数ではないので、6で割ったときの余りが0, 2, 3, 4である数は除外されます。6で割って1余る数と5余る数の組のうちで連続する奇数となるのは、6で割って5余る数が6の倍数より1小さい数であることから、ある整数 a について、 $6 \times a - 1$ と $6 \times a + 1$ の形で表すことができる数の組です。

たとえば、 $6 \times 1 - 1 = 5$ と、 $6 \times 1 + 1 = 7$ は双子素数です。よって、連続する3つの奇数の組が $(6 \times a - 3, 6 \times a - 1, 6 \times a + 1)$ という形で表せて、 $6 \times a - 3$ が平方数、 $6 \times a - 1$ と $6 \times a + 1$ が双子素数となる場合を探します。 $6 \times a - 3$ は3の倍数なので、素因数分解をすると3を必ず含みます。また、平方数であることから、3を2個、4個、6個、…と偶数個含みます。よって、 $3 \times 3 = 9$ の倍数です。さらに、奇数であることから、 $9 \times (\text{奇数の平方数})$ となります。順に調べていくと、次のようになります。

$$9 \times 1 \times 1 = 9 \text{ のときの } (9, 11, 13)$$

明らかに条件を満たします。

$$9 \times 3 \times 3 = 81 \text{ のときの } (81, 83, 85)$$

85が5の倍数なので、条件を満たしません。

$$9 \times 5 \times 5 = 225 \text{ のときの } (225, 227, 229)$$

$13 \times 13 = 169$ 、 $17 \times 17 = 289$ であることから、227と229が13以下の素数の倍数になっているかを調べます。2の倍数は偶数、3の倍数は各位の数の和が3の倍数、5の倍数は一の位が0か5なので、明らかに2, 3, 5の倍数にはなっていません。また、7, 11, 13でも割り切れないので、227と229は素数です。よって、条件を満たします。

$$9 \times 7 \times 7 = 441 \text{ のときの } (441, 443, 445)$$

445が5の倍数なので、条件を満たしません。

$9 \times 9 \times 9 = 729$ のときの $(729, 731, 733)$

$23 \times 23 = 529$, $29 \times 29 = 841$ であることから, 731 と 733 が 23 以下の素数の倍数になっているかを調べます。 731 が 17 で割り切れる ($731 = 17 \times 43$) ので, 条件を満たしません。

$9 \times 11 \times 11 = 1089$ のときの $(1089, 1091, 1093)$

$31 \times 31 = 961$, $37 \times 37 = 1369$ であることから, 1091 と 1093 が 31 以下の素数の倍数になっているかを調べると, どの素数の倍数にもなっていないので, どちらも素数であることがわかります。よって, 条件を満たします。

$9 \times 13 \times 13 = 1521$ のときの $(1521, 1523, 1525)$

1525 が 5 の倍数なので, 条件を満たしません。

$9 \times 15 \times 15 = 2025$ なので, 以上で全てとなります。

よって, $(1, 3, 5)$, $(9, 11, 13)$, $(225, 227, 229)$, $(1089, 1091, 1093)$ が答えとなります。