最難関問題

１０１１，１１１等の和

　１０１１＋１１１＝１１２２，のように，各位の数が０か１である１以上の何個かの整数の和を求めたところ，１２３４になりました。

（１）条件を満たす４個の整数の組み合わせは何通りありますか。

（２）
　①　条件を満たす整数の個数は最大で何個ですか。

　②　条件を満たす整数の組み合わせは，（１）で求めたものも含めて全部で何通りありますか。

最難関問題

１０１１，１１１等の和　（１）６通り　（２）①１０個　②１４１通り

（１）４個の整数の一の位と十の位は図①できまりです。百の位に１を２個，千の位に１を１個置く方法を考えて，図②の６通りが正解です。

図①

１１
１１
１１
１
１２３４

図②

１１１１	１１１１	１１１	１０１１	１０１１	１１１
１１１	１１	１１	１１１	１１１	１１１
１１	１１	１１	１１１	１１	１１
１	１０１	１１０１	１	１０１	１００１
１２３４	１２３４	１２３４	１２３４	１２３４	１２３４

（２）

①　１が４個，１０が３個，１００が２個，１０００が１個で４＋３＋２＋１＝１０（個）です。

②　４個の整数の組み合わせは６通りで，１０個の整数の組み合わせは１通りですから，５個から９個の場合を考えます。

９個の場合

１をＡ，１０をＢ，１００をＣ，１０００をＤと表すと，Ａ４個，Ｂ３個，Ｃ２個，Ｄ１個のうちどれか２つを組み合わせれば，９個の整数になります。たとえば，ＡとＣを組み合わせると１０１になります。もちろん，同じ記号２つを組み合わせることはできません。

ＡとＢ，ＡとＣ，ＡとＤ，ＢとＣ，ＢとＤ，ＣとＤの組み合わせで，６通りです。

８個の場合

記号３個のセットを１組作るか，記号２個のセットを２組作るかで，８個の整数にできます。

○３個のセット１組

ＡＢＣ，ＡＢＤ，ＡＣＤ，ＢＣＤの４通りです。

○２個のセット２組

記号２個のセットはＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤの６組あるので，その組み合わせを考えます。

・ＡＢと，ＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤで６通り

・ＡＣと，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤで５通り

・ＡＤと，ＢＣで１通り

・ＢＣと，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤで３通り

以上より，４＋６＋５＋１＋３＝１９（通り）です。

最難関問題

７個の場合

記号４個のセットを１組作るか，記号３個のセットと記号２個のセットを１組ずつ作るか，記号２個のセットを３組作るかで，７個の整数にできます。

○４個のセット１組

ＡＢＣＤの１通りです。

○３個のセットと２個のセット１組ずつ

記号３個のセットはＡＢＣ，ＡＢＤ，ＡＣＤ，ＢＣＤの４組，

記号２個のセットはＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤの６組あります。

・ＡＢＣと，ＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤで６通り

・ＡＢＤと，ＡＢ，ＡＣ，ＢＣで３通り

・ＡＣＤと，ＡＢ，ＡＣ，ＢＣで３通り

・ＢＣＤと，ＡＢ，ＡＣ，ＢＣで３通り　　あわせて６＋３×３＝１５（通り）です。

○２個のセット３組

ＡＢ
- ＡＢ…ＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤの６組
- ＡＣ…ＡＣ，ＡＤ，ＢＣ，ＢＤ，ＣＤの５組
- ＡＤ…ＢＣの１組
- ＢＣ…ＢＣ，ＢＤ，ＣＤの３組

ＡＣ
- ＡＣ…ＡＤ，ＢＤの２組
- ＡＤ…ＢＣの１組
- ＢＣ…ＢＤの１組

ＡＤ ― ＢＣ…ＢＣの１組

ＢＣ ― ＢＣ…ＢＤの１組

あわせて６＋５＋３＋２＋１×５＝２１（通り）です。

以上より，１＋１５＋２１＝３７（通り）です。

最難関問題

６個の場合

　ここからは，定められた個数の整数について直接考えます。６個の整数について，ＡおよびＢの割り振りを考えると，（ア）～（ウ）の３パターンになります。それぞれについて，ＣとＤの割り振りを考えます。

（ア）	（イ）	（ウ）
Ａ	Ａ	Ａ
ＡＢ	Ａ	Ａ
ＡＢ	ＡＢ	Ａ
ＡＢ	ＡＢ	ＡＢ
０	Ｂ	Ｂ
０	０	Ｂ

（ア）６個の整数はすべて１以上なので，ＡおよびＢを割り振らなかった整数にはＣやＤを割り振らなければなりません。①の場合，Ｄの割り振り方が３通り，重複を避けて，②の場合Ｃの割り振り方が２通りなので，あわせて５通りです。

（ア）	①	②
Ａ		
ＡＢ		
ＡＢ		
ＡＢ		
０	Ｃ	Ｃ
０	Ｃ	Ｄ

（イ）①の場合は３通り，重複を避けて②の場合は１１通り，③の場合は５通りなので，あわせて１９通りです。

（イ）	①	②	③
Ａ			
Ａ			
ＡＢ			
ＡＢ			
Ｂ			
０	ＣＤ	Ｃ	Ｄ

（ウ）①の場合は８通り，重複を避けて②の場合は５通り，③の場合は７通りなので，あわせて２０通りです。

（ウ）	①	②	③
Ａ	Ｄ		
Ａ			
Ａ			
ＡＢ		Ｄ	
Ｂ			Ｄ
Ｂ			

　以上より，５＋１９＋２０＝４４（通り）です。

最難関問題

５個の場合

５個の整数について，ＡおよびＢの割り振りを考えると，(ア)，(イ）の２パターンになります。それぞれについて，ＣとＤの割り振りを考えます。

（ア）	（イ）
Ａ	Ａ
ＡＢ	Ａ
ＡＢ	ＡＢ
ＡＢ	ＡＢ
０	Ｂ

（ア）①では４通り，重複を避けて②では５通りなので，あわせて９通りです。

（ア）	①	②
Ａ		
ＡＢ		
ＡＢ		
ＡＢ		
０	Ｄ	Ｃ

（イ）①では７通り，②では７通り，③では５通りなので，あわせて１９通りです。

（イ）	①	②	③
Ａ	Ｄ		
Ａ			
ＡＢ		Ｄ	
ＡＢ			
Ｂ			Ｄ

以上より，９＋１９＝２８（通り）です。

（１）も合わせて，６＋１＋６＋１９＋３７＋４４＋２８＝１４１（通り）です。