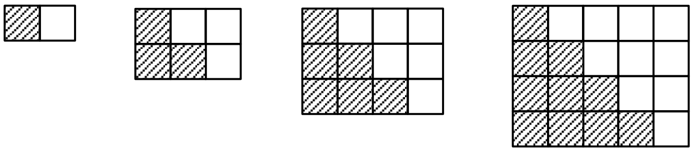
最難関問題

連続する整数の積と三角数・三角すい数・五胞体数とパスカルの三角形

連続する整数の積について考えます。

（１）１×２，２×３，３×４，４×５，…を計算した答えである，連続する２つの整数の積を２で割ると，どのような数になりますか。以下の図を参考にして答えなさい。



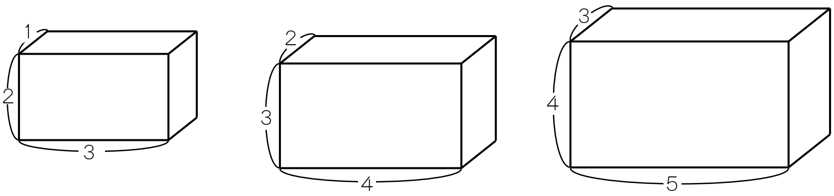
（２）１×２×３，２×３×４，３×４×５，…を計算した答えである，連続する３つの整数の積について次の問いに答えなさい。

①　連続する３つの整数の積は必ず６の倍数になります。その理由を説明しなさい。

②　連続する３つの整数の積を６で割ると，どのような数になりますか。「三角数」という言葉を使って説明しなさい。

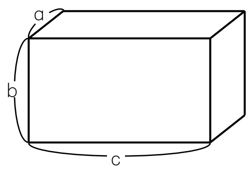
最難関問題

③　連続する３つの整数の積は，次のように直方体の体積で表すことができます。



②で説明した数を，「三角すい数」と言います。ｎ番目の三角すい数を［ｎ］で表すと，
［１］＝１，［２］＝４，［３］＝１０となって，
１×２×３＝［１］×６，２×３×４＝［２］×６，３×４×５＝［３］×６となります。

小さい順にａ，ｂ，ｃ，ｄを連続する４つの整数として，ａ×ｂ×ｃ＝［ａ］×６が成り立っているとき，ｂ×ｃ×ｄ＝［ｂ］×６となる理由を，下の図を用いて説明しなさい。説明において必要であれば，ｎ番目の三角数を＜ｎ＞で表して用いなさい。



最難関問題

（３）１×２×３×４，２×３×４×５，３×４×５×６，…を計算した答えである，連続する４つの整数の積について次の問いに答えなさい。

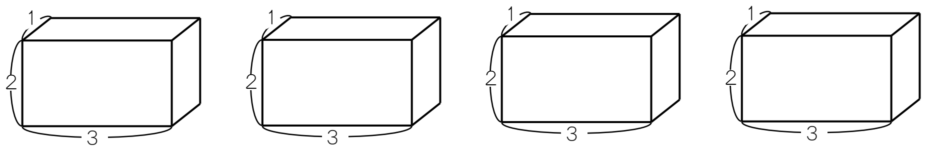
①　連続する４つの整数の積を必ず割り切ることができる整数の内で最大のものをＲとします。整数Ｒを求めなさい。

また，その理由を説明しなさい。

②　連続する４つの整数の積をＲで割ると，どのような数になりますか。「三角すい数」という言葉を使って説明しなさい。

最難関問題

③　連続する４つの整数１，２，３，４の積は次のように４個の直方体の体積の和で表すことができます。



②で説明した数を，「五胞体数」と言います。ｎ番目の五胞体数を｛ｎ｝で表すと，
｛１｝＝１，｛２｝＝５，｛３｝＝１５となります。

小さい順にａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅを連続する５つの整数として，ａ×ｂ×ｃ×ｄ＝｛ａ｝×Ｒが成り立っているとき，ｂ×ｃ×ｄ×ｅ＝｛ｂ｝×Ｒとなる理由を，上の図を参考にして説明しなさい。説明において必要であれば，ｎ番目の三角すい数を［ｎ］で表して用いなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

（４）整数をあるきまりにしたがって並べた下の図を，「パスカルの三角形」と言います。

ある連続する４つの整数の積が１７５５６０になりました。このとき，４つの連続する整数の中で一番小さい数を答えなさい。必要であれば，下のパスカルの三角形を利用しなさい。

																				1																				
																			1		1																			
																		1		2		1																		
																	1		3		3		1																	
																1		4		6		4		1																
															1		5		10		10		5		1															
														1		6		15		20		15		6		1														
													1		7		21		35		35		21		7		1													
												1		8		28		56		70		56		28		8		1												
											1		9		36		84		126		126		84		36		9		1											
										1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1										
									1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1									
								1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1								
							1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1							
						1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91		14		1						
					1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		105		15		1					
				1		16		120		560		1820		4368		8008		11440		12870		11440		8008		4368		1820		560		120		16		1				
			1		17		136		680		2380		6188		12376		19448		24310		24310		19448		12376		6188		2380		680		136		17		1			
		1		18		153		816		3060		8568		18564		31824		43758		48620		43758		31824		18564		8568		3060		816		153		18		1		
	1		19		171		969		3876		11628		27132		50388		75582		92378		92378		75582		50388		27132		11628		3876		969		171		19		1	
1		20		190		1140		4845		15504		38760		77520		125970		167960		184756		167960		125970		77520		38760		15504		4845		1140		190		20		1

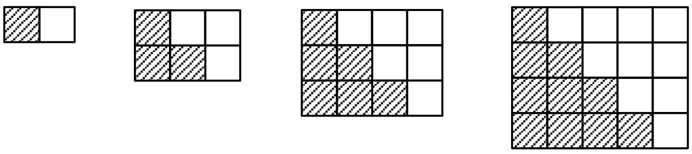
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する整数の積と三角数・三角すい数・五胞体数とパスカルの三角形　解答は解説参照

（１）明らかに，積を表すそれぞれの長方形は三角数の２倍になっています。



よって，

〇三角数

〇１から順に整数を加えていった数

〇１，３，６，１０，１５，…と差が順に大きくなっていく数列（階差数列）

等が正解となります。

（２）

①　連続する３つの整数の中には必ず２と３の倍数が含まれるので，６で割り切れます。

②　理由は③で聞かれているので，まずは答えを「当てる」ことを想定した問題です。

１×２×３÷６＝１

２×３×４÷６＝４＝１＋３

３×４×５÷６＝１０＝１＋３＋６

４×５×６÷６＝２０＝１＋３＋６＋１０

となるので，

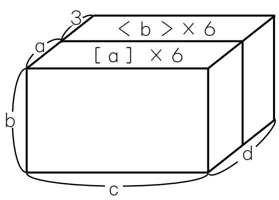
〇三角数の和

であることが書けていれば正解です。

③　［ｂ］＝＜１＞＋＜２＞＋…＋＜ａ＞＋＜ｂ＞＝［ａ］＋＜ｂ＞です。

［ａ］×６はａ×ｂ×ｃなので，与えられた直方体の体積に相当します。

＜ｂ＞×６＝ｂ×ｃ÷２×６＝ｂ×ｃ×３より，３辺の長さがｂ，ｃ，３の直方体を合体させると，次のようになります。



ｄ＝ａ＋３なので，ｂ×ｃ×ｄ＝［ｂ］×６が成り立ちます。

最難関問題

（３）

①　最小の連続する４つの整数の積は，１×２×３×４＝２４なので，Ｒは２４以下の整数です。また，連続する４つの整数の中には３の倍数が少なくとも１つ含まれ，偶数はちょうど２個含まれます。２個の偶数のうち一方は４の倍数なので，連続する４つの整数の積は３×２×４＝２４で割り切れます。よって，Ｒ＝２４です。

②　これも，察して当てることを想定した問題です。

１×２×３×４÷２４＝１

２×３×４×５÷２４＝５＝１＋４

３×４×５×６÷２４＝１５＝１＋４＋１０

４×５×６×７÷２４＝３５＝１＋４＋１０＋２０

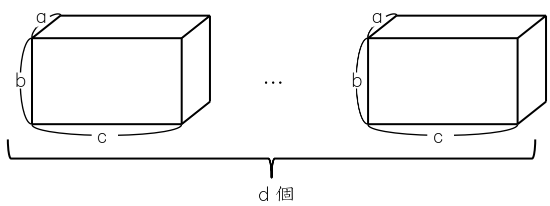
となるので，

〇三角すい数の和

であることが書けていれば正解です。

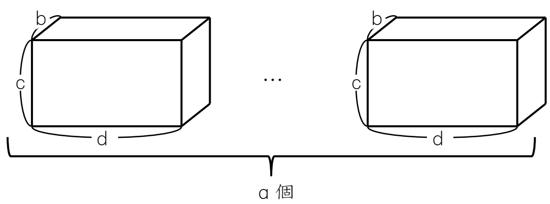
③　｛ｂ｝＝［１］＋［２］＋…＋［ａ］＋［ｂ］＝｛ａ｝＋［ｂ］です。

｛ａ｝×２４はａ×ｂ×ｃ×ｄなので，ｄ個の直方体の体積の和に相当します。



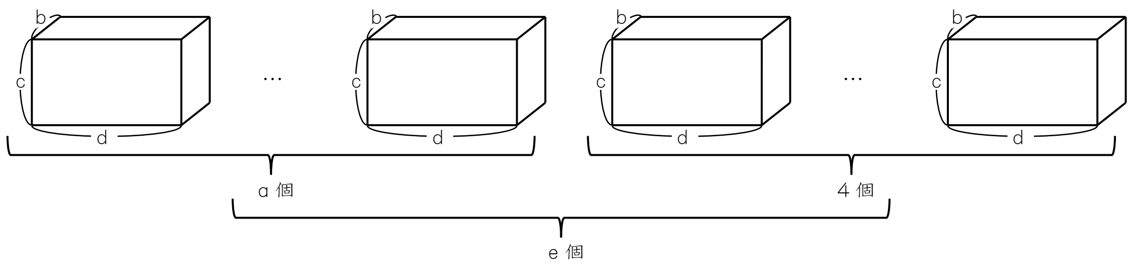
　このように五胞対数では「たて・横・高さ・個数」という４つの次元が現れます。（２）の三角すい数では「たて・横・高さ」の３つの次元が現れ，（２）③の説明においては新しい直方体を作る際に，３つの次元が入れかわっていました。つまり，小さい順にたて・高さ・横としているので，それにしたがって新しい直方体の向きを変えると，それまでたてであったａ＋３が横に，高さであったｂがたてに，横であったｃが高さになります。

　同様に考えて，「たて・横・高さ・個数」を以下のように入れかえます。



最難関問題

　次に，三角すい数［ｂ］について考えます。［ｂ］×６＝ｂ×ｃ×ｄなので，［ｂ］×２４はｂ×ｃ×ｄ×４ですから，［ａ］×２４とあわせると，直方体がａ＋４＝ｅ（個）になります。



　よって，ｂ×ｃ×ｄ×ｅ＝｛ｂ｝×２４です。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

（４）ここまで見てきたように，三角数は順に整数を加えた和，三角すい数は順に三角数を加えた和，五胞体数は順に三角すい数を加えた和なので，パスカルの三角形の中に現れます。

　１７５５６０÷２４＝７３１５で，表に現れている五胞体数は４８４５まででですから，続きを下の図のように求めます。

１が並ぶ　連続する整数　三角数　三角すい数　五胞体数

1																				
1	1																			
1	2	1																		
1	3	3	1																	
1	4	6	4	1																
1	5	10	10	5	1															
1	6	15	20	15	6	1														
1	7	21	35	35	21	7	1													
1	8	28	56	70	56	28	8	1												
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1

1330　5985

7315

　７３１５は１９番目の五胞体数なので，１９×２０×２１×２２＝２４×７３１５＝１７５５６０です。