最難関問題

半端な位置のレーザー光線

図１の長方形ＡＢＣＤは１辺の長さが１㎝の小正方形をたてに３列，横に４列並べたもので，辺ＣＤ上の頂点Ｃから０.５㎝のところに点Ｐがあります。このとき，図２のように２点Ａ，Ｐを結ぶ直線は６個の小正方形を通過します。

図１

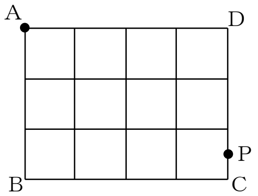


図２

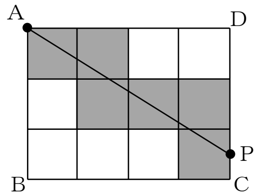
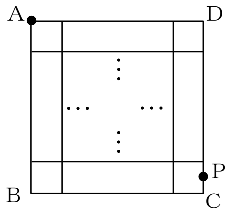


図３



（１）図３は，１辺の長さが１㎝の小正方形をたて，横ともに５列並べた正方形ＡＢＣＤで，辺ＣＤ上の頂点Ｃから０.５㎝のところに点Ｐがあります。このとき，点Ａ，Ｐを結ぶ直線は何個の小正方形を通過しますか。

（２）１辺の長さが１㎝の小正方形をたてに１９列，横に１０列並べた長方形ＡＢＣＤの辺ＣＤ上の頂点Ｃから$\frac{2}{3}$㎝のところに点Ｐがあります。このとき，点Ａ，Ｐを結ぶ直線は何個の小正方形を通過しますか。

（３）１辺の長さが１㎝の小正方形をたてに１５列，横に１０列並べた長方形ＡＢＣＤの辺ＣＤ上に点Ｐがあり，ＣＰの長さは１㎝未満です。このとき，点Ａ，Ｐを結ぶ直線は２３個の小正方形を通過しました。ＣＰの長さとして考えられるものをすべて答えなさい。

受験算数の基礎

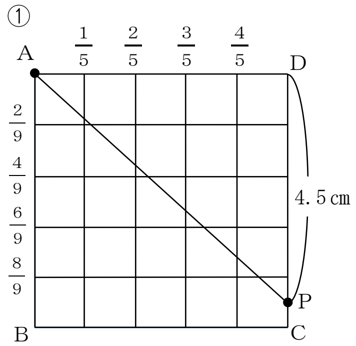
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

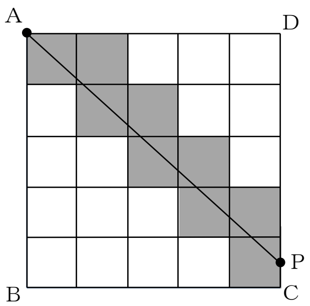
半端な位置のレーザー光線　（１）９個　（２）２７個　（３）$\frac{5}{7}$㎝，$\frac{5}{9}$㎝

（１）直線の代わりに，頂点Ａから点Ｐに向けて１秒間でレーザー光線が届くものと考えます。すると，図①のように小正方形のたて方向の辺を，$\frac{1}{5}$秒後，$\frac{2}{5}$秒後，$\frac{3}{5}$秒後，$\frac{4}{5}$秒後に通過します。また，横方向の辺については，ＤＰの長さが５－０.５＝４.５（㎝）であることから，$\frac{1}{4.5}$秒後，$\frac{2}{4.5}$秒後，$\frac{3}{4.5}$秒後，$\frac{4}{4.5}$秒後に通過するので，分子と分母を２倍して，$\frac{2}{9}$秒後，$\frac{4}{9}$秒後，$\frac{6}{9}$秒後（$\frac{2}{3}$秒後），$\frac{8}{9}$秒後です。両方向の辺をあわせると４＋４＝８（回）通過するので，辺を通過した後に通過する小正方形８個と，最初に通過する小正方形１個をあわせて，８＋１＝９（個）です。通過する小正方形は，図②のようになります。

図①



図②



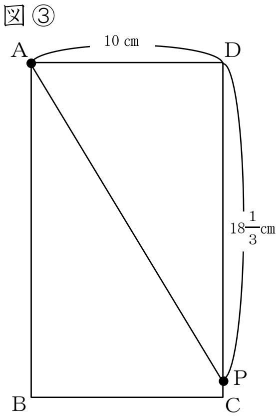
（２）（１）同様に，頂点Ａから点Ｐに向けて１秒間でレーザー光線が届くものと考えます。すると，小正方形のたて方向の辺を，$\frac{1}{10}$秒後，…，$\frac{9}{10}$秒後に通過します。また，横方向の辺については，ＤＰの長さが，

１９－$\frac{2}{3}$＝１８$\frac{1}{3}$（㎝）であることから，１÷１８$\frac{1}{3}$＝$\frac{3}{55}$より，

$\frac{3}{55}$秒後，$\frac{6}{55}$秒後，$\frac{9}{55}$秒後，…，$\frac{54}{55}$秒後に通過します。

$\frac{1}{10}$，…，$\frac{9}{10}$と$\frac{3}{55}$，…，$\frac{54}{55}$の２つの分数列は，$\frac{3}{5}$＝$\frac{33}{55}$において重複するので，両方向の辺をあわせると９＋１８－１＝２６（回）通過するので，辺を通過した後に通過する小正方形２６個と，最初に通過する小正方形１個をあわせて，２６＋１＝２７（個）です。

図③

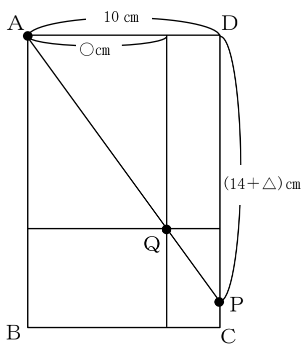


最難関問題

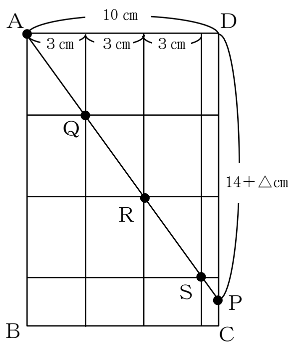
（３）図④のように，ＤＰの長さは（１４＋△）㎝で，△は０より大きく１未満です。このとき，ＡＰはたて方向の辺を９本，横方向の辺を１４本通過するので，もしも両方向の辺を同時に通過することがなければ，９＋１４＋１＝２４（個）の小正方形を通過することになります。問題の条件は２３個ですから，２４－２３＝１より，１回だけ両方向の辺を同時に通過することになります。その際に通過する小正方形の頂点をＱとし，図④のように○㎝を定めます。○は１から９までの整数です。

まず，○は１０÷２＝５位かの整数ではありません。というのも，例えば○＝３だとすると，３㎝ごとにＡＰは両方向の辺を同時に通過することになるので，図⑤のように小正方形の頂点Ｒ，Ｓも通過します。この場合，ＡＰが通過する小正方形の個数は２４－３＝２１（個）になります。

図④



図⑤



よって，○が６から９までの整数である場合を考えます。ＡＰは横方向の辺を１４回通過するので，その時間は分数を用いて，$\frac{n\times 1}{n\times 14+\triangle}$秒後，$\frac{n\times 2}{n\times 14+\triangle}$秒後，…，$\frac{n\times 14}{n\times 14+\triangle}$秒後，と表すことができます。このとき，ｎは整数，△はｎより小さい整数です。まとめると，$\frac{n\times \square}{n\times 14+\triangle}$秒後で，□は１から１４までの整数です。

$\boxed{\text{○＝６の場合}}$

$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$（秒後）にＡＰは横方向の辺を通過します。$\frac{n\times \square}{n\times 14+\triangle}=\frac{3}{5}$より，

（ｎ×□）:（ｎ×１４＋△）＝３：５，ｎ×□×５＝ｎ×４２＋△×３となります。ここで，□×５は４２より大きいので，□＝９のときに，ｎ×４５＝ｎ×４２＋△×３です。

しかし，△×３はｎ×（４５－４２）＝ｎ×３より小さいので，成り立ちません。

最難関問題

○＝７の場合

$\dfrac{7}{10}$秒後にＡＰは横方向の辺を通過します。$\dfrac{n\times\square}{n\times14+\triangle}=\dfrac{7}{10}$より，

（ｎ×□）:（ｎ×１４＋△）＝７：１０，ｎ×□×１０＝ｎ×９８＋△×７となります。ここで，□×１０は９８より大きいので，□＝１０のときに，ｎ×１００＝ｎ×９８＋△×７です。

△×７＝ｎ×（１００－９８）＝ｎ×２より，△＝２，ｎ＝７とすると，

$\dfrac{7\times\square}{7\times14+2}=\dfrac{7\times\square}{100}=\dfrac{7}{10}$より，□＝１０のときに$\dfrac{7\times10}{100}=\dfrac{7}{10}$となって両方向の辺を同時に通過します。ＡＰは横方向の辺を$\dfrac{7}{100}$秒後，$\dfrac{14}{100}$秒後，…，$\dfrac{98}{100}$秒後に通過するので，ＢＰの長さは$1\div\dfrac{7}{100}=14\dfrac{2}{7}$（㎝），ＣＰの長さは$15-14\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$（㎝）です。

○＝８の場合

$\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$（秒後）にＡＰは横方向の辺を通過します。$\dfrac{n\times\square}{n\times14+\triangle}=\dfrac{4}{5}$より，

（ｎ×□）:（ｎ×１４＋△）＝４：５，ｎ×□×５＝ｎ×５６＋△×４となります。ここで，□×５は５６より大きいので，□＝１２のときに，ｎ×６０＝ｎ×５６＋△×４です。

しかし，△×４はｎ×（６０－５６）＝ｎ×４より小さいので，成り立ちません。

○＝９の場合

$\dfrac{9}{10}$秒後にＡＰは横方向の辺を通過します。$\dfrac{n\times\square}{n\times14+\triangle}=\dfrac{9}{10}$より，

（ｎ×□）:（ｎ×１４＋△）＝９：１０，ｎ×□×１０＝ｎ×１２６＋△×９となります。ここで，□×１０は１２６より大きいので，□＝１３のときに，ｎ×１３０＝ｎ×１２６＋△×９です。

△×９＝ｎ×（１３０－１２６）＝ｎ×４より，△＝４，ｎ＝９とすると，

$\dfrac{9\times\square}{9\times14+4}=\dfrac{9\times\square}{130}=\dfrac{9}{10}$より，□＝１３のときに$\dfrac{9\times13}{130}=\dfrac{9}{10}$となって両方向の辺を同時に通過します。ＡＰは横方向の辺を$\dfrac{9}{130}$秒後，$\dfrac{18}{130}$秒後，…，$\dfrac{126}{130}$秒後に通過するので，ＢＰの長さは$1\div\dfrac{9}{130}=14\dfrac{4}{9}$（㎝），ＣＰの長さは$15-14\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$（㎝）です。