受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

整数の列と単位分数の列

整数の列を，次の操作で数の列に変えます。

①　その列の整数の最小公倍数を求めます。

②　①で求めた最小公倍数でその列の整数を左から順に割った商の列を作ります。

例えば，＜２，３，４＞という整数の列では最小公倍数は１２ですから，＜$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$＞という列になります。次の問いに答えなさい。

（１）

①　＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$＞になる整数の列はいくつもあります。列に並んでいる整数をすべてたしたときに，和が１番目に小さい列，２番目に小さい列，３番目に小さい列を答えなさい。

②　＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，□＞になる整数の列はいくつもあります。列に並んでいる整数をすべてたしたときに，和が１番目に小さい列，２番目に小さい列，３番目に小さい列を答えなさい。

（２）ある整数の列が＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，□＞になりました。□にあてはまる$\frac{1}{100}$以上の数は何個ありますか。

（３）整数の列＜Ａ，Ｂ，Ｃ＞が＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，□＞になります。Ａ，Ｂにあてはまる整数をきめたところ，Ｃにあてはまる整数は１２個考えることができました。このとき，Ａ，Ｂにあてはまる整数の組のうち，和が最も小さいものを答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

整数の列と単位分数の列

（１）①＜２，５，６＞，＜４，１０，１２＞，＜６，１５，１８＞

　　②＜２，５，３＞，＜２，５，６＞，＜４，１０，３＞

（２）６７個　（３）Ａ＝２８，Ｂ＝７０

（１）まず，例として挙げられている整数の列＜２，３，４＞について考えます。２，３，４の最小公倍数１２を分母とすると，＜$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{12}$＞となるので，約分して＜$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$＞となります。

①　同様に考えると，＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$＞を通分して＜$\frac{2}{30}$，$\frac{5}{30}$，$\frac{6}{30}$＞となるので，整数の列＜２，５，６＞を得ることができます。

　また，分母と分子を２倍して＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{12}{60}$＞とすると整数の列＜４，１０，１２＞，３倍すると＜６，１５，１８＞となります。

②　$\frac{1}{15}$と$\frac{1}{6}$を通分すると$\frac{2}{30}$と$\frac{5}{30}$になります。ここで問題となるのは，分子の２と５の最小公倍数は１０であって３０ではない，ということです。最小公倍数が３０になるためには，もう１つの整数は３か６か１５か３０です。それぞれ次のようになります。

＜$\frac{2}{30}$，$\frac{5}{30}$，$\frac{3}{30}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{10}$＞，＜$\frac{2}{30}$，$\frac{5}{30}$，$\frac{6}{30}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$＞，

＜$\frac{2}{30}$，$\frac{5}{30}$，$\frac{15}{30}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$＞，＜$\frac{2}{30}$，$\frac{5}{30}$，$\frac{30}{30}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，１＞

　次に，①のように分母が６０の場合を考えます。分母と分子を２倍することで得られるのは，

＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{6}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{10}$＞，＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{12}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$＞，

＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{30}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$＞，＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{60}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，１＞，

の４つです。それ以外に，

＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{3}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{20}$＞，＜$\frac{4}{60}$，$\frac{10}{60}$，$\frac{15}{60}$＞＝＜$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$＞

の２つも条件を満たします。ここまでで和が小さいものを順に３つ並べると，＜２，５，３＞，＜２，５，６＞，＜４，１０，３＞です。分母が９０以降の場合は明らかにさらに大きくなるので，以上の３つが答えとなります。

最難関問題

（２）$\dfrac{1}{15}$と$\dfrac{1}{6}$を１５と６のいろいろな公倍数で通分すると$\dfrac{2\times\triangle}{30\times\triangle}$と$\dfrac{5\times\triangle}{30\times\triangle}$になります。このとき，２×△と５×△の最小公倍数は１０×△ですから，もう１つの分数である$\dfrac{\bigcirc}{30\times\triangle}$の分子○がどのような数であればよいのかを考えます。○は少なくとも３の倍数であり，３０×△の約数でなければなりません。しかし，△が３の倍数の場合を考えなければなりません。例えば△＝３のときは分母９０で通分して，＜$\dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{6}$，□＞＝＜$\dfrac{6}{90}$，$\dfrac{15}{90}$，$\dfrac{\bigcirc}{90}$＞となって，この場合○は９の倍数でなければなりません。

以上のことを考えると，○は３０×△の約数のうち，素因数分解をしたときに現れる３の個数が３０×△と同じであるもの，ということになります。よって，$\dfrac{\bigcirc}{30\times\triangle}$を約分した$\dfrac{1}{\Diamond}$において（約分して１になる場合は１＝$\dfrac{1}{1}$とみなすこととして），分母の◇は３０×△の約数のうちで３の倍数ではないものとなります。

よって，＜$\dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{6}$，□＞の□にあてはまる$\dfrac{1}{100}$以上の数は$\dfrac{1}{100}$～$\dfrac{1}{1}$までの分数のうちで分母が３の倍数ではないものですから，１００÷３＝３３余り１，１００－３３＝６７より，６７個です。

（３）＜Ａ，Ｂ，Ｃ＞を＜$\dfrac{2\times\triangle}{30\times\triangle}$，$\dfrac{5\times\triangle}{30\times\triangle}$，$\dfrac{C}{30\times\triangle}$＞にしてから約分すると＜$\dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{6}$，□＞になるので，（２）よりＣは３０×△の約数のうち，素因数分解をしたときに現れる３の個数が３０×△と同じであるものです。このとき，Ｃは３０×△を３で割れるだけ割ったあとの整数の約数に３を必要な分だけかけ算することで手に入れられます。Ａ，Ｂができるだけ小さくなるためには△もできるだけ小さい必要がありますから，△は３の倍数ではないできるだけ小さい整数で，ＡとＢの最小公倍数である１０×△が１２個の約数を持っている場合を探します。

１０を素因数分解すると２×５なので，１０×△が
２×２×２×２×２×５のときに約数の個数は（５＋１）×（１＋１）＝１２（個），
２×２×２×５×５のときに約数の個数は（３＋１）×（２＋１）＝１２（個），
２×２×５×７のときに約数の個数は（２＋１）×（１＋１）×（１＋１）＝１２（個），
などが考えられます。最も小さいのは２×２×５×７＝１４０ですから，△＝１４となって，
Ａ＝２８，Ｂ＝７０です。