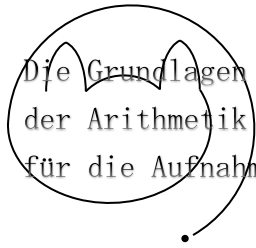


各位の数の計算・最大

0が現れない整数 a について、 $[a]$ を a の各位の数の間に $+$ $-$ \times \div のいずれかを入れてできた式を計算した答えのうち、最も大きいものとします。たとえば、

$[1\ 2\ 2] = 1 + 2 \times 2 = 5$, $[5\ 1\ 5] = 5 \times 1 \times 5 = 25$ です。

- (1) $[1\ 2\ 3]$, $[2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2]$ を計算しなさい。
- (2) $[a] = 6$ となるような整数 a は全部で何個ありますか。
- (3) $[a] = 9$ となるような整数 a は全部で何個ありますか。
- (4) $[a] = 27$ となるような整数 a のうち、小さいほうから50番目のものを答えなさい。



各位の数の計算・最大

- (1) $[1\ 2\ 3] = 7$, $[2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2] = 9$ (2) 2 6 通り
(3) 1 2 0 通り (4) 1 1 2 2 6 1

(1) $[1\ 2\ 3] = 1 + 2 \times 3 = 7$, $[2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2] = 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$ です。

(2) 桁ごとに考えると、次のようになります。

1 けた

6 の 1 通り

2 けた

1 5 … 並びかえて 2 通り, 2 3 … 2 通り。よって, $2 \times 2 = 4$ (通り)

3 けた

1 1 4 … 3 通り, 2 1 3 … 2 1 3 と 3 1 2 で 2 通り。1 2 3 など $1 + 2 \times 3 = 7$ となるので, のぞきます。よって, $3 + 2 = 5$ (通り)

4 けた

1 1 1 3 … 4 通り, 2 2 1 1 … どのように並びかえてもよいので, $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (通り)。

よって, $4 + 6 = 10$ (通り)

5 けた

1 1 1 1 2 … 5 通り

6 けた

1 1 1 1 1 1 … 1 通り

以上より, $1 \times 2 + 4 + 5 \times 2 + 10 = 26$ (通り) です。

(3) 今度は、桁ではなく各位に現れる1以外の数に注目をして場合分けをしてみます。積が9以下となる2以上の整数の組み合わせは、

$9 = 3 \times 3$, $8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $4 = 2 \times 2$ です。

$$3 \times 3 = 9$$

$3 \square 3$ の□に1が0~3個入れば $[3 \square 3] = 9$ となるので、4通りです。

$$2 \times 4 = 8$$

$2 \square 4$ 1の□に1が0~2個入ればよいので、□が3通り、2と4の並びかえで2通り、

$2 \square 4$ と1の並びかえで2通りより、 $3 \times 2 \times 2 = 12$ (通り)です。

また、21114の場合はかけ算を用いずに、 $2 + 1 + 1 + 1 + 4 = 9$ となるので、2と4を並びかえて2通りです。

よって、 $12 + 2 = 14$ (通り)です。

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$2 \square 2 \square 2$ 1の2つの□に1があわせて0~2個入ればよいので、

(0, 0) ... 1通り, (0, 1) ... 2通り, (1, 1) ... 1通り, (0, 2) ... 2通りより、 $1 \times 2 + 2 \times 2 = 6$ (通り)です。また、 $2 \square 2 \square 2$ と1の並びかえで2通りなので、 $6 \times 2 = 12$ (通り)です。

また、2121112のような場合は、たし算だけで9となるので、 $2 \square 2 \square 2$ の2つの□に1があわせて3個入ればよいので、

(0, 3) ... 2通り, (1, 2) ... 2通りより $2 \times 2 = 4$ (通り)です。

よって、 $12 + 4 = 16$ (通り)です。

$$2 \times 3 = 6$$

$2 \square 3$ 111の□に1が0~1個入ればよいので、□が2通り、2と3の並びかえで2通り、

$2 \square 3$ と111の並びかえで4通りより、 $2 \times 2 \times 4 = 16$ (通り)です。

また、121131のような場合は、たし算だけで9となります。このような場合、

$\square 2 \triangle 3 \square$ の△に2が2個以上、△と2つの□に1があわせて4個入ればよいので、

(△, □, □) = (2, 2, 0) ... 2通り, (2, 1, 1) ... 1通り, (3, 1, 0) ... 2通り,

(4, 0, 0) ... 1通りより、 $2 \times 2 + 1 \times 2 = 6$ (通り)です。また、2と3の並びかえが2通りなので、 $6 \times 2 = 12$ (通り)です。

よって、 $16 + 12 = 28$ (通り)です。

$$2 \times 2 = 4$$

$[2\ 1\ 2\ 1\ 1] = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7$ となるように、そもそも2を2個と1を混ぜる場合にはたし算によって計算の答えが最大となります。よって、2を2個と1を5個並びかえて、

$$\frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ (通り) です。}$$

次に、 $[1\ 1\ 6\ 1] = 1 + 1 + 6 + 1 = 9$ のように、1以外の整数が多くても1個しか現れない場合を考えます。

9...1通り、18...2通り、117...3通り、1116...4通り、11115...5通り、
111114...6通り、1111113...7通り、11111112...8通り、
111111111...1通りとなって、 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 1 = 37$ (通り) です。

以上をすべて加えて、 $4 + 14 + 16 + 28 + 21 + 37 = 120$ (通り) です。

(4) $[a] = 27$ となる2けたの a は、 $27 = 3 \times 9$ より、 39 と 93 の2つですから、小さいほうから1番目の a は 39 、2番目は 93 です。このように、積が27以下となる組み合わせを並びかえていきます。

○ $27 \cdots 3 \times 9$, $3 \times 3 \times 3$

○ $25 \cdots 5 \times 5$

○ $24 \cdots 3 \times 8$, 4×6 , $2 \times 2 \times 6$, $2 \times 3 \times 4$, $2 \times 2 \times 2 \times 3$

○ $21 \cdots 3 \times 7$

...

2 けた...2通り

$39 \cdots$ 並びかえて2通り

3 けた...3通り

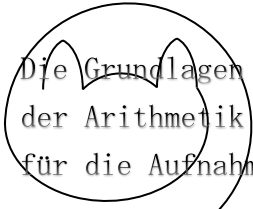
$319 \cdots 3$ と9を並びかえて2通り、 $333 \cdots 1$ 通り。

4 けた...7通り

$3 \square 9 \cdots \square$ に11を入れ、3と9を並びかえて2通り

$3 \square 3 \square 3 \cdots \square$ の一方に1を入れて、2通り

55 11... 55 , 1, 1を並びかえて3通り



最難関問題

5けた...24通り

$3 \square 9 \dots \square$ に111を入れ, 3と9を並びかえて2通り

$3 \square 3 \square 3 \dots \square$ に1をあわせて2個入れるので, (2, 0) ... 2通り, (1, 1) ... 1通り, あわせて3通り

$5 \square 1 \square 5$ 11... $5 \square 1 \square 5$, 1, 1を並びかえて3通り

$3 \square 8$ 111... $3 \square 8$, 1, 1, 1を並びかえて4通り, 3と8を入れかえて2通りなので, $4 \times 2 = 8$ (通り)

$4 \square 6$ 111... $3 \square 8$ 111の場合と同じで8通り

ここまでで, $2 + 3 + 7 + 24 = 36$ (通り) あります。よって, 6桁の整数のうちで小さいほうから $50 - 36 = 14$ (番目) のものを求めます。

6けた

$3 \square 9 \dots \square$ に1111を入れ, 3と9を並びかえる

$3 \square 3 \square 3 \dots \square$ に1をあわせて3個入れる

$5 \square 1 \square 1 \square 5$ 11... $5 \square 1 \square 1 \square 5$, 1, 1を並びかえる

$3 \square 1 \square 8$ 111... $3 \square 1 \square 8$, 1, 1, 1を並びかえ, 3と8を入れかえる

$4 \square 1 \square 6$ 111... $4 \square 1 \square 6$, 1, 1, 1を並びかえ, 4と6を入れかえる

$2 \square 2 \square 6$ 111... $2 \square 2 \square 6$, 1, 1, 1を並びかえ, 2, 2, 6を入れかえる

$2 \square 3 \square 4$ 111... $2 \square 3 \square 4$, 1, 1, 1を並びかえ, 2, 3, 4を入れかえる

以上のうちで111□□□の形になるのは,

$3 \square 1 \square 8$ 111の並びかえで2通り, $4 \square 1 \square 6$ 111の並びかえで2通り,

$2 \square 2 \square 6$ 111の並びかえで3通り, $2 \square 3 \square 4$ 111の並びかえで6通り, あわせて13通りです。

よって, 小さいほうから14番目は11□□□□の形の最も小さいものですから, 112261です。