受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

線対称と回転対称性・１

２本の直線㋐，㋑が図１のように６０度で交わっています。図１のように中心が直線㋐の上にある小さな円を１つかきます。そして，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない個数の円をかき足すと，図２，図３の順になって，小さな円は３個になります。

図１

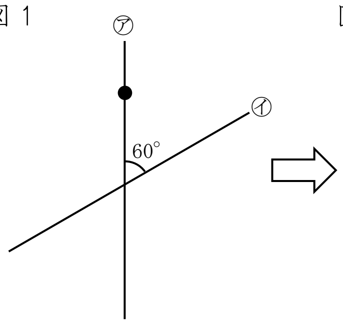


図２

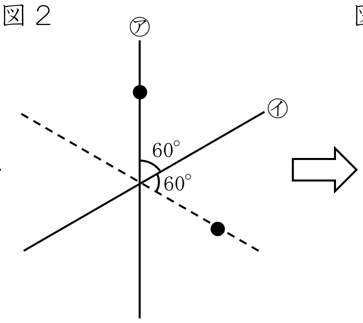
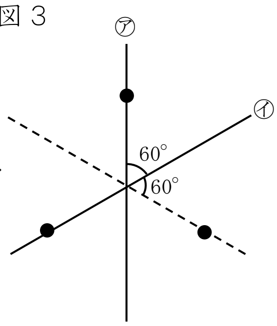


図３



（１）図４のように２本の直線㋐，㋑が４５度で交わっています。中心が直線㋐の上にくるように，小さな円を１つかき，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない個数の円をかき足すと，小さな円は全部で何個になりますか。

（２）図５のように２本の直線㋐，㋑が７０度で交わっています。中心が直線㋐の上にくるように，小さな円を１つかき，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない個数の円をかき足すと，小さな円は全部で何個になりますか。（図６は直線㋐を１０度ずつ傾けた点線を図５にかき加えたものです。必要であれば，図６を利用して答えなさい。）

図４

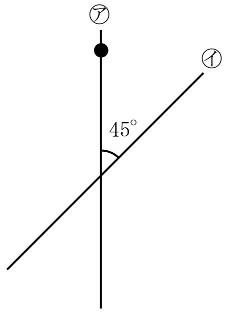


図５

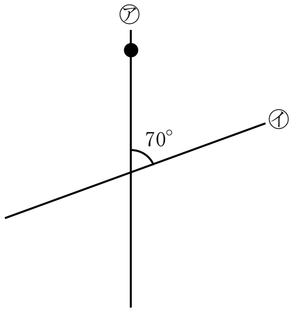
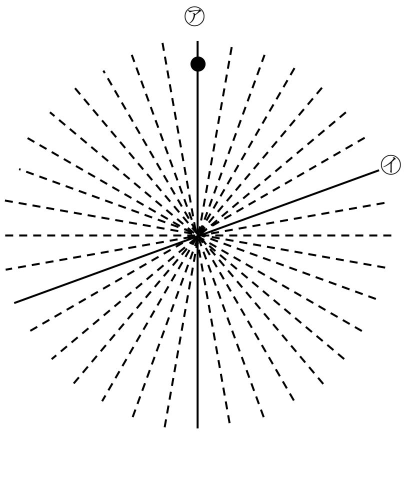


図６



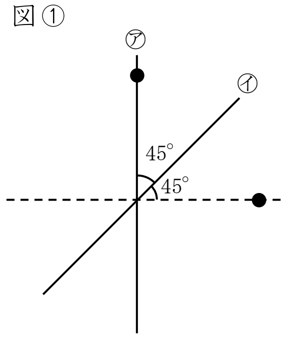
（３）２本の直線㋐，㋑が$\boxed{\text{あ}}$度で交わっています。中心が直線㋐の上にくるように，小さな円を１つかき，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない個数の円をかき足したところ，小さな円は（１）と同じ個数になりました。$\boxed{\text{あ}}$にあてはまる９０以下の数のうち，７０以外のものをすべて答えなさい。

（４）２本の直線㋐，㋑が$\boxed{\text{い}}$度で交わっています。中心が直線㋐の上にくるように，小さな円を１つかき，円の配置が直線㋐，㋑のどちらを対称の軸としても線対称になるように，できるだけ少ない個数の円をかき足したところ，小さな円は全部で８４０個になりました。$\boxed{\text{い}}$にあてはまる９０以下の数は，全部で何通り考えることができますか。

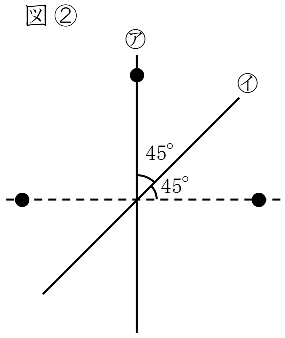
線対称と回転対称性・１　（１）４個　（２）１８個　（３）１０度，５０度　（４）９６通り

（１）図①，②，③の順に小さな円をかき足せばよいので，４個です。

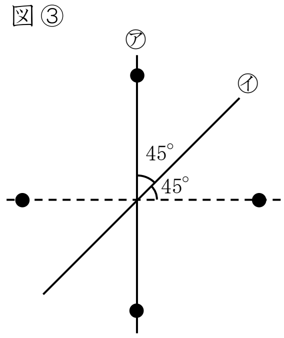
図①



図②



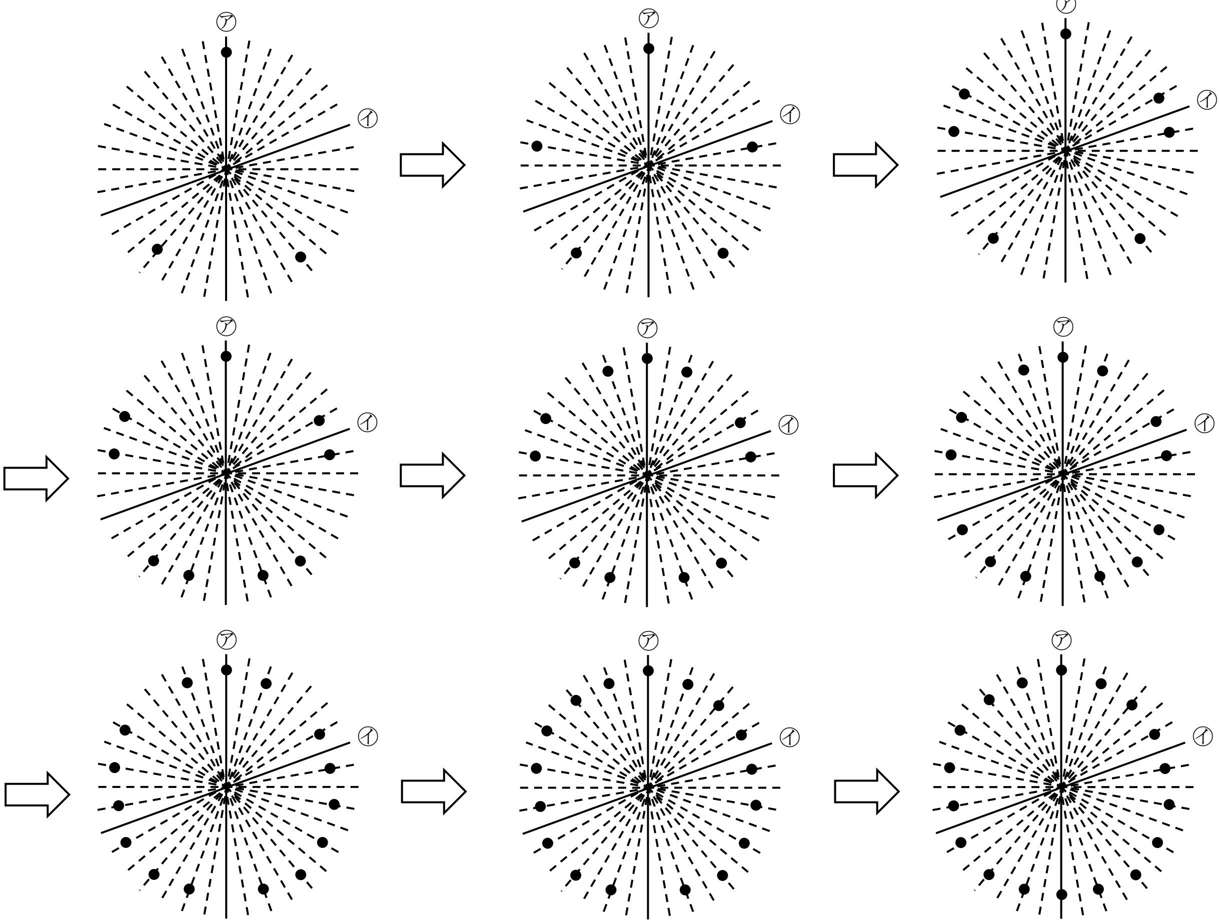
図③



最難関問題

（２）直線㋑で線対称になるように小さな円をかいてから，直線㋐で線対称になるように小さな円をかく，ということを繰り返すと，図④のようになって，１８個です。

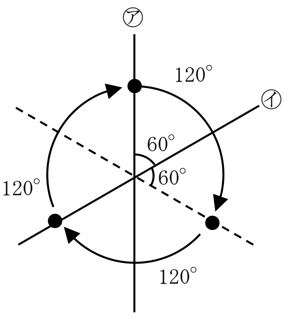
図④



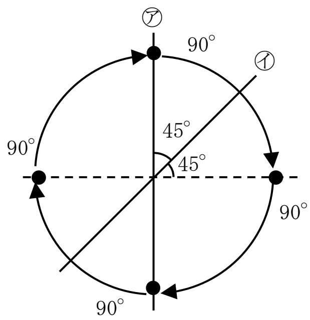
（３）直線㋐，㋑の交わる角度が６０度，４５度，７０度の場合についてここまで見てきたので，そこから導き出せることを考えます。

図⑤，⑥のように，直線㋐，㋑の交わる角度が６０度，４５度の場合，小さな円の配置は，６０×２＝１２０（度），４５×２＝９０（度）回転させることで，元通りになる「回転対称性」を持っています。なお，点対称とは１８０度の回転対称性のことです。

図⑤

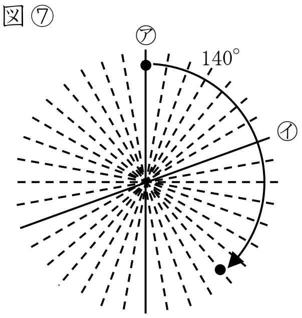


図⑥

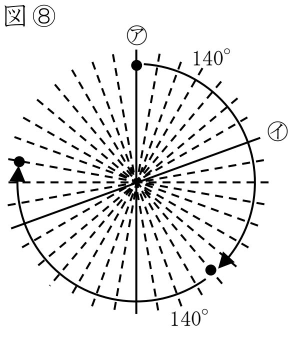


では，直線㋐，㋑の交わる角度が７０度の場合も同様に，７０×２＝１４０（度）の回転対称性があるということができるでしょうか。直線㋐の上にある最初の円から順に１４０度ごとに小さい円を書いていくと，図⑦，⑧，⑨，⑩となり，１４０度の回転対称性が成り立ちます。

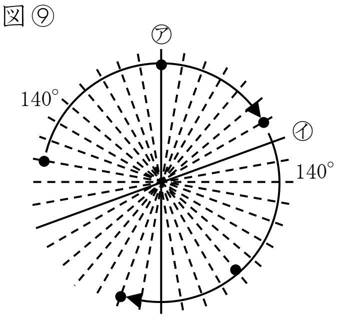
図⑦



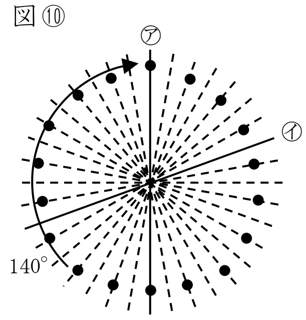
図⑧



図⑨



図⑩



このことは，１４０と３６０の最小公倍数を１４０で割ったときの商が１８となることに他ならず，連除法を利用して確認することができます。また，このときに連除法の７は，図⑩の状態までに円をかき足す作業が「７周」することを表します。

２０）１４０　３６０
　　　　７　　１８

最難関問題

２０	Ａ	３６０
	ａ	１８

　同様にして小さい円が１８個になるためには，右の連除法においてＡが９０×２＝１８０以下であることから，ａは１８０÷２０＝９以下の数です。また，ａは円をかき足す作業が完了するまでに何周するかを表しているので，整数ですから，ａと１８が互いに素であればよいことがわかります。そのような条件を満たすのは，ａ＝１，５，７の場合です。ａ＝７の場合はＡ＝１４０となって，直線㋐，㋑は１４０÷２＝７０（度）で交わるので，残りの場合を求めて，

・ａ＝１の場合…Ａ＝２０より，直線㋐，㋑は２０÷２＝１０（度）で交わる

・ａ＝５の場合…Ａ＝１００より，直線㋐，㋑は１００÷２＝５０（度）で交わる

となります。

（４）（３）と同様に考えると，次の一見成立しない連除法が導かれます。

$$\begin{array}{r|ll} 20 & A & 360 \\ \hline & a & \underline{840} \end{array}$$

しかし，直線㋐，㋑は整数の角度で交わっていなければならないという条件はないので，Ａが小数・分数である場合を考えると，８４０＝７×１２０より，次のようになります。

$$\begin{array}{r|ll} \frac{1}{7} & A & 360 \\ \hline 3 & A & 2520 \\ \hline & a & \underline{840} \end{array}$$

なお，ａは円をかき足す作業が完了するまでに何周するかを表しているので，整数です。Ａが１８０以下の数であることから，ａは４２０以下の，４２０と互いに素の整数なので，４２０を素因数分解すると２×２×３×５×７となることから，４２０以下の２，３，５，７の倍数ではない数です。

４２０以下の２，３，５，７の倍数ではない数の個数を求めるために，最初に４２０以下の２，３，５の倍数ではない整数の個数を求めます。２，３，５の最小公倍数３０に注目をして，３０以下の２，３，５の倍数ではない整数を求めると，１，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９の８個です。４２０÷３０＝１４より，これが１４回繰り返されるので，４２０以下の２，３，５の倍数ではない整数の個数は，８×１４＝１１２（個）です。

この１１２個の数の中にある７の倍数は，７の倍数のうちで２，３，５の倍数ではない数ですから，７×１，７×７，７×１１，７×１３，…，を計算した数です。４２０÷７＝６０より４２０以下の７の倍数は７×１から７×６０までなので,上の場合と同様に考えて,６０÷３０＝２,８×２＝１６(個)です。

以上より，ａは１１２－１６＝９６（通り）考えることができます。

直線㋐，㋑の交わる角度はａ×２０÷２によって求められるので，ａと同じく９６通り考えられます。