最難関問題

三角数・平方数・立方数

１から順に奇数を次のように階段の形に並べていきます。

１
３　５
７　９　１１
１３　１５　１７　１９
２１　…

（１）□段目に並んだ数の和が３３７５であるとき，１段目から□段目までに並んだすべての数の和を求めなさい。

（２）１辺１cmの立方体の形をした積み木が６００００個あります。これを使ってできるだけ多くの，大きさの異なる立方体を作ります。積み木は余ってもよいものとします。また，積み木１個だけからなる１辺１cmの立方体も立方体として数えてかまいません。

このとき，最も多くて何個の立方体を作ることができますか。また，積み木は何個余りますか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角数・平方数・立方数　（１）１４４００　（２）２１個作ることができ，６６３９個余る

（１）それぞれの段に並ぶ奇数の和と，１段目からその段までに並んだすべての奇数の「総和」は次のようになります。

				和	総和
1				1	1
3	5			8	9
7	9	１１		２７	３６
13	15	17	19	６４	100
21	…				

１，８，２７，６４，…は，１＝１×１×１，８＝２×２×２，２７＝３×３×３，６４＝４×４×４というように，同じ整数を３個かけあわせた立方数になっています。また，総和は1から始まる奇数をいくつか足した答えなので平方数になりますが，１段目では１個，２段目まででは３個，３段目まででは６個，４段目まででは１０個と，加える奇数の個数が三角数になっているので，同じ三角数をかけあわせた平方数です。

３３７５を素因数分解すると，３×３×３×５×５×５＝１５×１５×１５となるので，□＝１５です。１５番目の三角数は（１＋１５）×１５÷２＝１２０ですから，１段目から１５段目までに並んだ数の和は，１２０×１２０＝１４４００です。

（２）立方体の個数が最も多くなるのは，１辺が１㎝，２㎝，３㎝，４㎝，…と立方体を小さい順に作っていく場合です。この場合，使う立方体の個数は，１＋８＋２７＋６４＋…と立方数を順に加えることになるので，同じ三角数をかけあわせた平方数になります。

２５×２５＝６２５であることから，２５０×２５０＝６２５００なので，おおまかにいって２５０未満の三角数を考えます。（１）より１から１５までの和は１２０ですから，１２０＋１６＋１７＋１８＋１９＋２０＝１２０＋１８×５＝２１０，２１０＋２１＝２３１，２３１＋２２＝２５５より，２３１×２３１を計算すると５３３６１となるので，立方体は１辺１㎝から２１㎝までの２１個を作ることができ，６００００－５３３６１＝６６３９（個）余ります。