受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

３個の整数の公約数・公倍数・２

　３個の異なる整数を小さい順にＡ，Ｂ，Ｃとします。また，Ａ，Ｂ，Ｃの最大公約数をＧ，最小公倍数をＬとします。このとき，Ａ×Ｂ×Ｃ＝７２００，Ｇ×Ｇ×Ｌ＝２４０が成り立ちます。次の問いに答えなさい

（１）最大公約数Ｇとして考えられる整数をすべて答えなさい。

（２）Ａ，Ｂ，Ｃにあてはまる整数の組をすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

<table>
<tr><td>（１）</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">（２）</td></tr>
<tr><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td></tr>
<tr><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td></tr>
<tr><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td></tr>
<tr><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td></tr>
<tr><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td><td>（　，　，　）</td></tr>
</table>

最難関問題

３個の整数の公約数・公倍数・２

（１）１，２

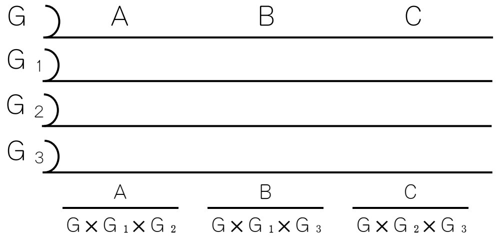
（２）　（１，３，２４０），（２，１５，２４０），（１５，１６，３０），（３，１０，２４０），
（３，３０，８０），（５，６，２４０），（５，３０，４８），（６，１５，８０），
（１０，１５，４８），（４，３０，６０），（６，２０，４０），（１０，１２，６０），
（１２，２０，３０）

（１）図①のように，連徐法でＡ，Ｂ，Ｃを最大公約数で割ってできる，ＡとＢの商の最大公約数をG_1，ＡとＣの商の最大公約数をG_2，ＢとＣの商の最大公約数をG_3とします。ＡはＧ，G_1，G_2によって割られるので，連徐法の一番下の段においてＡの真下に並ぶ数は，$\frac{A}{G \times G_1 \times G_2}$で，Ｂ，Ｃについても同様です。最小公倍数Ｌは$G \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times \frac{A}{G \times G_1 \times G_2} \times \frac{B}{G \times G_1 \times G_3} \times \frac{C}{G \times G_2 \times G_3}$なので，この式を計算をすると，$\frac{A \times B \times C}{G \times G \times G_1 \times G_2 \times G_3}$となります。よって，$G \times G \times L = \frac{A \times B \times C}{G_1 \times G_2 \times G_3}$です。

$A \times B \times C = 7200$，$G \times G \times L = \frac{A \times B \times C}{G_1 \times G_2 \times G_3} = 240$であることから，
$G_1 \times G_2 \times G_3 = 7200 \div 240 = 30$です。

　また，Ｇ×Ｇ×Ｌ＝２４０ということからは，Ｇ×Ｇは２４０の約数となるような平方数なので，１×１＝１，２×２＝４，４×４＝１６のいずれかです。それぞれの場合，最小公倍数Ｌは，２４０÷（１×１）＝２４０，２４０÷（２×２）＝６０，２４０÷（４×４）＝１５となりますが，１５は$G_1 \times G_2 \times G_3 = 30$の倍数ではないため，不適当です。よって，最大公約数Ｇは１か２です。

図①



最難関問題

（２）最大公約数Ｇが１の場合と２の場合で分けて考えます。

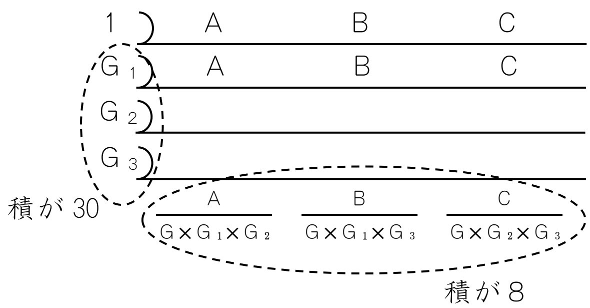
最大公約数Ｇ＝１の場合

最小公倍数Ｌは，２４０÷（１×１）＝２４０となります。このことと，$G_1 \times G_2 \times G_3 = 30$であることから，図②のようになります。最下段にならぶ３個の整数は互いに素で積が８であるため，（１，１，８）の並びかえとなります。また，G_1，G_2，G_3も互いに素です。よって，互いに素で積が３０の以下の整数の組の並びかえとなります。

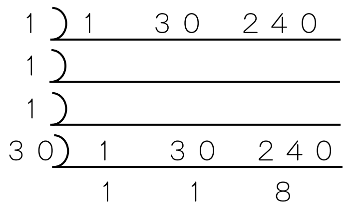
…（１，１，３０），（１，２，１５），（１，３，１０），（１，５，６），（２，３，５）

（１，１，３０）の場合，８と３０は互いに素ではないので，８は３０で割ってできる数ですから，図③のようになって，（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（１，３０，２４０）です。

図②



図③



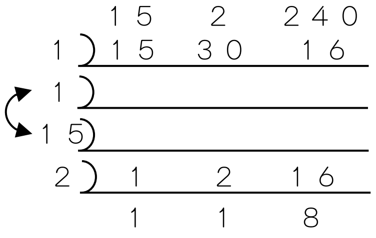
（１，２，１５）の場合，８と２は互いに素ではないので，８は２で割ってできる数です。図④のように２通りの場合が考えられるので，小さい順にならびかえて，

（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（２，１５，２４０），（１５，１６，３０）です。

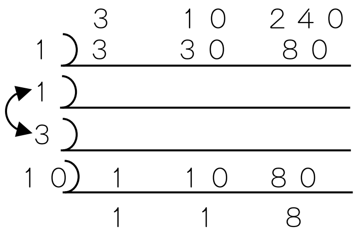
（１，３，１０）の場合，８と１０は互いに素ではないので，８は１０で割ってできる数です。図⑤のように２通りの場合が考えられるので，（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（３，１０，２４０），（３，３０，８０）です。

（１，５，６）の場合，８と６は互いに素ではないので，８は６で割ってできる数です。図⑥のように２通りの場合が考えられるので，（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（５，６，２４０），（５，３０，４８）です。

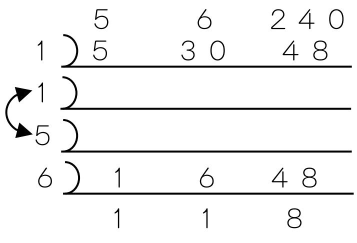
図④



図⑤

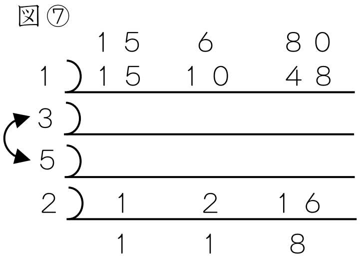


図⑥



最難関問題

図⑦



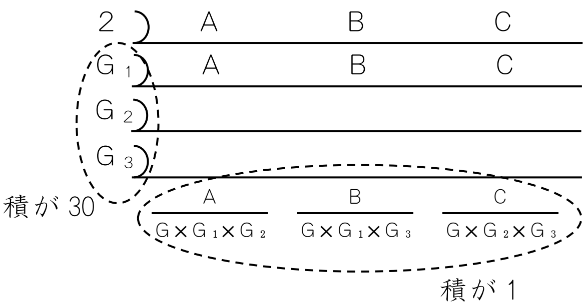
（２，３，５）の場合，８と２は互いに素ではないので，８は２で割ってできる数です。図⑦のように２通りの場合が考えられるので，小さい順にならびかえて，
（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（６，１５，８０），（１０，１５，４８）です。

最大公約数Ｇ＝２の場合

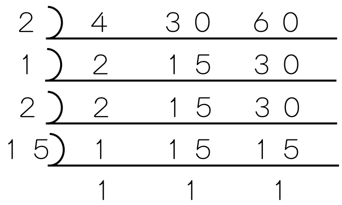
最小公倍数Ｌは，２４０÷（２×２）＝６０となります。このことと，$G_1 \times G_2 \times G_3$＝３０であることから，図⑧のようになります。最下段にならぶ３個の整数は，積が１であるため，すべて１です。G_1，G_2，G_3の組みあわせは上の場合と同様ですが，（１，１，３０）の場合はＡ＝Ｂとなってしまうので，条件を満たしません。

（１，２，１５）の場合，図⑨のようになって，（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（４，３０，６０）です。

図⑧

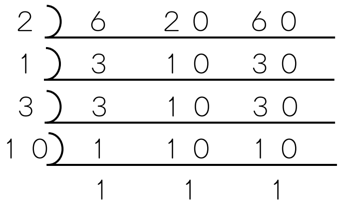


図⑨

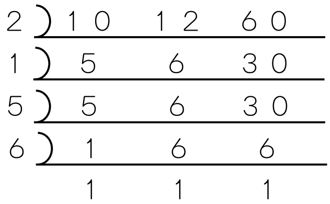


（１，３，１０），（１，５，６），（２，３，５）の場合は，図⑩～⑫のようになって，
（Ａ，Ｂ，Ｃ）＝（６，２０，４０），（１０，１２，６０），（１２，２０，３０）です。

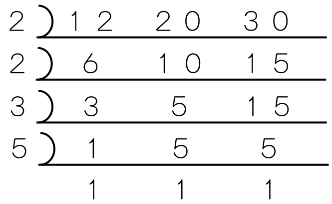
図⑩



図⑪



図⑫



以上より，（１，３，２４０），（２，１５，２４０），（１５，１６，３０），（３，１０，２４０），（３，３０，８０），（５，６，２４０），（５，３０，４８），（６，１５，８０），（１０，１５，４８），（４，３０，６０），（６，２０，４０），（１０，１２，６０），（１２，２０，３０）が答えとなります。