受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

反射の回数とレーザー光線

図１の正方形ＡＢＣＤは１辺の長さが１㎝です。頂点Ａから小さい玉を発射します。このとき，小さい玉が最初にはね返った地点をＰとします。玉は辺に当たると，当たったときと等しい角度ではね返り，頂点に当たるとそこで止まります。例えば，図２のようにＰが辺ＢＣ上のＣから$\frac{1}{2}$㎝のところにあるとき，小さい玉は１回はね返って頂点Ｄで止まります。

図１

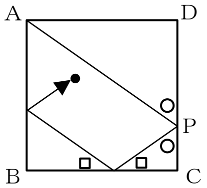
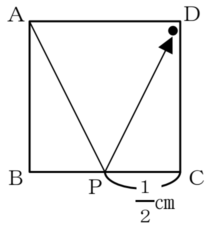


図２



（１）Ｐが辺ＢＣ上のＢから$\frac{4}{7}$㎝のところにあるとき，小さい玉は何回はね返ってどの頂点で止まりますか。

（２）Ｐが辺ＢＣ上にあるとします。小さい玉が（１）と等しい回数はね返ってある頂点で止まりました。このとき，ＣＰの長さとして考えられるもののうち，最も短い長さは何㎝で，そのとき小さい玉はどの頂点で止まりますか。

（３）小さい玉が以下の回数だけはね返って止まるとき，Ｐの位置は何通り考えることができますか。小さい玉が止まる頂点ごとに答えなさい。

解答例

頂点Ａ	３通り
頂点Ｂ	０通り
頂点Ｃ	５通り
頂点Ｄ	１５通り

①１００回

頂点Ａ	通り
頂点Ｂ	通り
頂点Ｃ	通り
頂点Ｄ	通り

②１０３回

頂点Ａ	通り
頂点Ｂ	通り
頂点Ｃ	通り
頂点Ｄ	通り

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

反射の回数とレーザー光線

（１）９回，頂点Ｂ　（２）$\frac{1}{6}$cm，頂点Ｄ

（３）

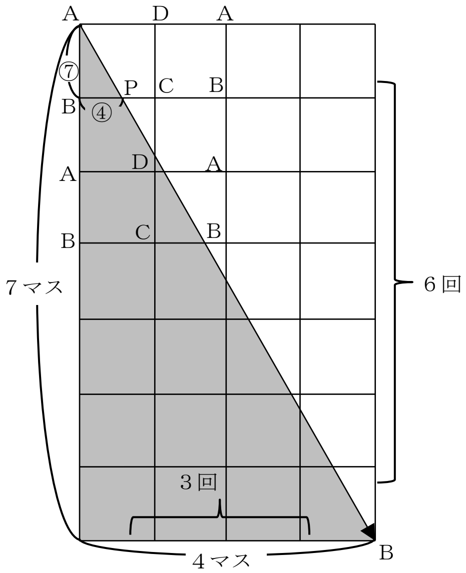
頂点Ａ	０通り
頂点Ｂ	０通り
頂点Ｃ	３２通り
頂点Ｄ	０通り

頂点Ａ	０通り
頂点Ｂ	２４通り
頂点Ｃ	０通り
頂点Ｄ	２４通り

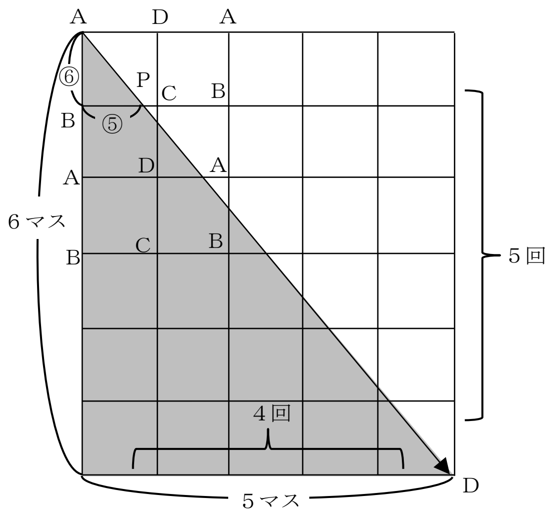
（１）図①のように正方形ＡＢＣＤを鏡映しに増やして考えます。三角形ＡＢＰにおいて，辺ＡＢと辺ＢＰの長さの比が７：４なので，ちょうど下に７マス，右に４マス進んだところで頂点Ｂに当たって止まります。それまでに横方向の辺を７－１＝６（回），たて方向の辺を４－１＝３（回）通過するので，６＋３＝９（回）はね返ります。

（２）（１）より，横方向とたて方向の辺を通過する回数の和が９で，横方向の辺を通過する回数とたて方向の辺を通過する回数の差ができるだけ小さい場合を探すと，９＝５＋４より，図②のようになって頂点Ｄで止まります。三角形ＡＢＰにおいて辺ＡＢと辺ＢＰの長さの比は６：５となるので，辺ＢＰの長さは，$1\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$（cm），ＣＰの長さは$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$（cm）です。

図①



図②



最難関問題

（３）まず，反射の回数に関わらず，頂点Ａで止まることはありません。図③のように，鏡映しにおいて，頂点Ａは偶数マスごとにあるので，玉が頂点Ａで止まるためにはたて横ともに偶数マス進まなければなりません。その場合，必ずたてと横のマスの数を２で割ったところで別の頂点に当たってしまうからです。

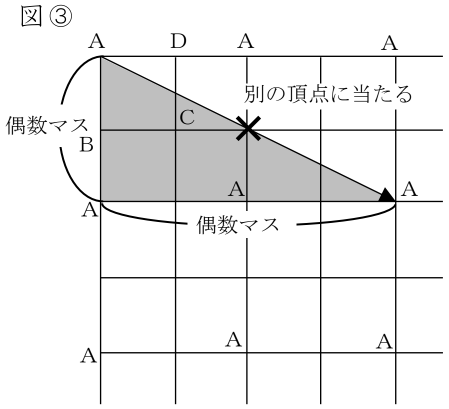
①　１００回はね返る場合，鏡映しにおいてたて横両方向の辺をどちらも偶数回通過する場合と，奇数回通過する場合を考えることができます。偶数回通過する場合は，図④のようにたてと横に並ぶマスはどちらも奇数マスになり，頂点Ｃで止まります。また，辺を通過する回数の和が１００ですから，たて横に並ぶ奇数マスの数の和は１００＋１＋１＝１０２となります。ただし，例えばたてに３マス・横に９９マス並んでいる場合，両方を３で割ったたてに１マス・横に３３マス進んだところで頂点に当たってしまいます。よって，たてと横に並ぶマスの数は「互いに素」（最大公約数が１）でなければなりません。１０２を素因数分解すると，２×３×１７となるので，３および１７の倍数を用いずに１０２を２つの奇数に和分解します。

　１０２＝（たてのマス）＋（横のマス）＝１＋１０１＝５＋９７＝…＝９７＋５＝１０１＋１となるので，１０２以下の３および１７の倍数ではない奇数の個数を求めます。

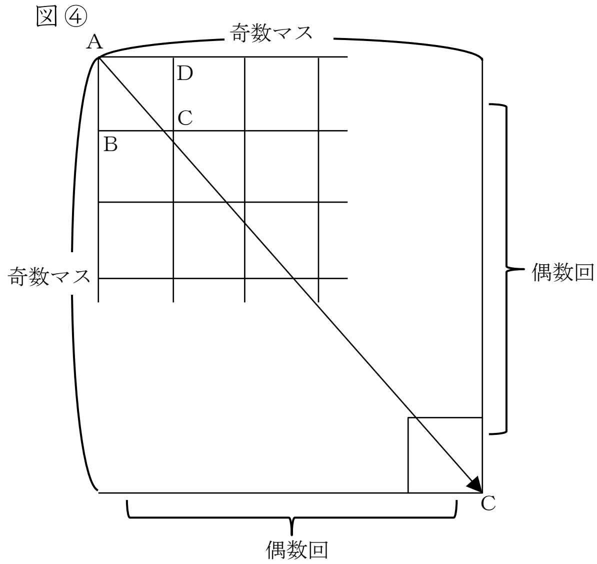
１０２以下の奇数は１０２÷２＝５１（個）あります。３の倍数は１０２÷３＝３４（個）のうちで，３４÷２＝１７（個）が奇数です。１７の倍数は１０２÷１７＝６（個）のうちで，６÷２＝３（個）が奇数です。また，３と１７の公倍数の奇数として５１があります。よって，

５１－（１７＋３－１）＝３２（個）より，Ｐの位置は３２通り考えられます。

図③



図④



　次に，鏡映しにおいてたて横ともに辺を奇数回通過するときは，たてと横に並ぶマスはどちらも偶数マスになるので，必ず途中で頂点と当たってしまいます。

　以上より，頂点Ｃは３２通り，他の頂点は０通りとなります。

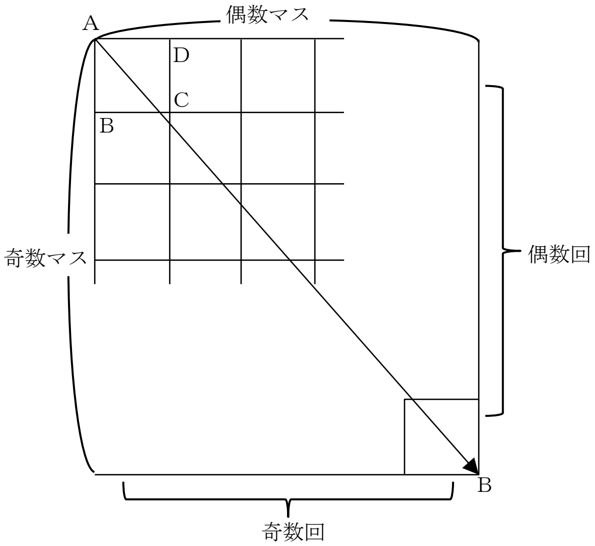
最難関問題

②　１０３回はね返る場合，鏡映しにおいてたて方向と横方向の辺を通過する回数は，一方が奇数，他方が偶数となるので，図⑤，⑥のように頂点Ｂで止まる場合と頂点Ｄで止まる場合が考えられます。

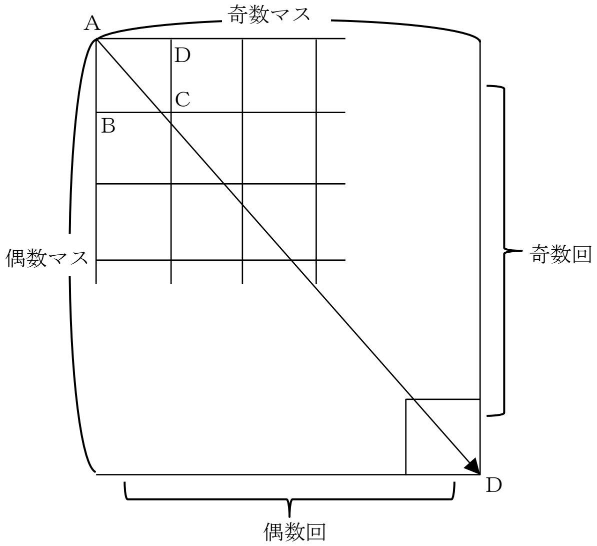
どちらの場合も，辺を通過する回数の和が１０３ですから，たて横に並ぶ奇数マスの数の和は１０３＋１＋１＝１０５となります。たてと横に並ぶマスの数は互いに素でなければならないので，１０５を素因数分解すると，３×５×７となるので，３，５，７の倍数を用いずに１０５を２つの整数に和分解します。

図５の頂点Ｂで止まる場合，
１０５＝（たてのマスの奇数個）＋（横のマスの偶数個）＝１＋１０４＝１１＋９４＝…＝１０３＋２となるので，たてのマスの個数に注目をして，１０５以下の３，５，７の倍数ではない奇数の個数を求めます。

図⑤



図⑥



１０５を素因数分解すると，３×５×７となります。３と５の最小公倍数は１５であり，１５以下の３や５の倍数ではない奇数は１，７，１１，１３の４個です。よって，１０５以下の３や５の倍数ではない奇数は，４×７＝２８（個）です。この２５個の奇数のうちで，７×１，７×７，７×１１，７×１３の４個は７の倍数ですから，２８－４＝２４（個）が１０５以下の３，５，７の倍数ではない奇数です。

以上より，頂点Ｂは２４通り，頂点Ｄも２４通り，他の頂点は０通りとなります。