受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

四角数表と囲い

図１のきまりにしたがって１から１０００までの整数を並べた表があります。図２のたて横２マスの枠でこの表の４個の整数を囲み，その和を考えます。

図１

1	2	5	10	17	26	…
4	3	6	11	18	27	
9	8	7	12	19	28	
16	15	14	13	20	29	
25	24	23	22	21	30	
36	35	34	33	32	31	
⋮						⋱

図２

（１）枠に囲まれた４個の整数の和が１７６になりました。解答欄に４個の整数を書き込みなさい。

（２）枠に囲まれた４個の整数の和が１１４になりました。解答欄に４個の整数を書き込みなさい。

（３）

4	3
9	8

と

3	6
8	7

はどちらも４個の整数の和が２４です。これを含めて，４個の整数の和が等しくなるような組は，表の中に何組ありますか。また，最も和が大きい組を書き込みなさい。

解答欄

（１）

（２）

（３）＿＿＿＿組

と

最難関問題

四角数表と囲い

（１）

37	50
38	51

（２）

21	30
32	31

（３）１５組，

886	885
947	946

と

871	930
932	931

（１）一番左の列と一番上の段に枠を置いた場合の４個の整数の和をいくつか求めると，図①のようになります。

図①

和１０

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和２４

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和４８

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

このような和の並びを，図②のように表します。

図②

１０　１６　３２　５６　８８　…

２４

４８

８０

１２０

⋮

一番左の列は２４から下に進むたびに差が２４，３２，４０，…と８ずつ大きくなり，一番上の段は１６から右に進むたびに差が１６，２４，３２と８ずつ大きくなっています。どちらも差が８づつ大きくなる階差数列であるため，次のように並べてみると，左の列の数に８を加えて１つ右にずらすと，２４＋８＝３２，４８＋８＝５６のように，上の段の数になっています。

左の列　２４，４８，８０，１２０，…

上の段　１６，３２，５６，８８，…

こういった規則性を利用して１７６に接近を試みると，上の段の数が

１６，３２，５６，８８，１２８，１７６となってちょうどあてはまります。これは，

1	2
4	3

から右に６個ずれているので，６番目の平方数である３６より１大きい３７が左上のマスに入って，

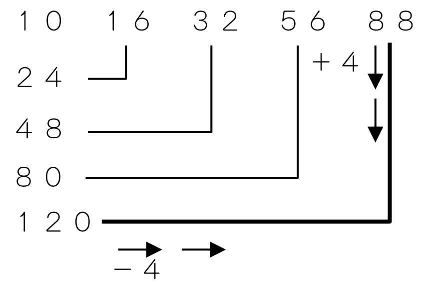
37	50
38	51

となります。

最難関問題

（２）１１４は８８と１２０の間の数ですから，図③の太い線の上にあると考えることができます。枠に囲まれた４つの数は左から右に進むとどれも１ずつ小さくなることから，その和は４小さくなり，同様に上から下に進むと４大きくなるはずです。ところが１１４では，１２０－１１４＝６，１１４－８８＝２６となって，差が４の倍数になりません。実際に調べていくと，８８から下に進むと図④のようになって，ちょうど曲がり角の部分で和が一気に大きくなって１１４となります。

図③



図④　和９２

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和９６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１００

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１１４

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

よって，答えは

21	30
32	31

です。

（３）図④の和が１１４になったところから左に向けて進んでいくと，図⑤のようになります。

図⑤　和１０８

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１１２

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１１６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１２０

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

　このように，枠に囲まれた４個の数の和は上から下に進むにつれて基本的には４ずつ大きくなるのですが，曲がり角の部分だけはその法則を外れてもっと大きくなり，そこから左に進むといったん小さくなってからまた４ずつ大きくなっていきます。

　このことによって，２組の４個の数の和が等しくなる，ということが起こります。１１４の場合にそのようにならないのは，１２０が４の倍数であるのに１１４は４の倍数ではないため，１２０から４ずつ小さくすることで得られる４つの数の和と一致することができないためです。

最難関問題

（１）より，一番左の列の４つの数の和は，２４，４８，８０，１２０，…といずれも４の倍数になります。よって，曲がり角の部分の４個の整数の和が４の倍数となる部分を探します。例えば，図⑥の場合は和が７６という４の倍数であり，実際にその左側に４個の整数の和が７６になる部分があります。

図⑥　和７６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和７６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

そこで，曲がり角の部分の４個の整数の和の規則性を求めます。

図⑦　和２４

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和４６

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和７６

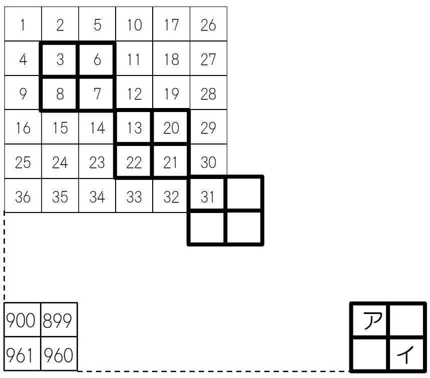
1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

和１１４

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

図⑦の２４，４６，７６，１１４は，差が２２，３０，３８と８ずつ大きくなっています。よって，この数列を続けると，２４，４６，７６，１１４，１６０，２１４，…となり，最初の数である２４が４の倍数であり，となりあう数の差は２２，３０，３８，４６，５４，…という４の倍数ではない2の倍数なので，２４，７６，１６０と１個おきに４の倍数が並びます。これらの枠の位置は図⑧のようになります。１０００以下の平方数は３１×３１＝９６１，３０×３０＝９００であることから，（３１－１）÷２＝１５（か所）の枠が条件を満たすので，枠に囲まれた４個の整数の和が等しくなるような組は１５組あります。

図⑧



また，図⑧のアにあてはまる数は９００－（３０－１）＝８７１，イにあてはまる数は９６１－（３１－１）＝９３１なので，図⑧の右下の枠は

871	930
932	931

となり，和は３６６４です。

これと，左はしの９００＋８９９＋９６１＋９６０＝３７２０との差は５６であることから，５６÷４＝１４より１４マスずらして，

886	885
947	946

も和が３６６４になります。