

連続する2つのフィボナッチ数の平方数の和・2

最初の2つの数が1, 1で、以降は前の2つの数の和が並ぶ数列を、フィボナッチ数列といいます。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

フィボナッチ数列に並ぶ数をフィボナッチ数といいます。1番目と2番目のフィボナッチ数は1, 3番目のフィボナッチ数は2, 4番目のフィボナッチ数は3です。

連続する2つのフィボナッチ数について、それぞれの平方数の和を計算します。たとえば、1番目と2番目のフィボナッチ数列の和は、 $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$ です。

N番目と(N+1)番目のフィボナッチ数の平方数の和を計算したところ、333番目のフィボナッチ数に等しくなりました。Nにあてはまる数を求めなさい。

連続する2つのフィボナッチ数の平方数の和・2 166

$$1 \times 1 + 1 \times 1 = 2,$$

$$1 \times 1 + 2 \times 2 = 5,$$

$$2 \times 2 + 3 \times 3 = 13,$$

$$3 \times 3 + 5 \times 5 = 34,$$

$$5 \times 5 + 8 \times 8 = 89,$$

のように、連続する2つのフィボナッチ数の平方数の和は、フィボナッチ数になります。というのも、□と△を連続するフィボナッチ数とすると、フィボナッチ数列は次のようになるからです。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8,$$

.....,

□,

△,

$$\square \times 1 + \triangle \times 1,$$

$$\square \times 1 + \triangle \times 2,$$

$$\square \times 2 + \triangle \times 3,$$

$$\square \times 3 + \triangle \times 5,$$

$$\square \times 5 + \triangle \times 8,$$

$$\square \times 8 + \triangle \times 13,$$

.....,

$$\square \times \square + \triangle \times \triangle$$

このように、□と△が現れた後のフィボナッチ数は、□と△に連続するフィボナッチ数をかけてから加えた数になっています。□をN番目とすると、△はN+1番目、□×□+△×△はN+1+N=2×N+1（番目）になります。2×N+1=333より、N=166です。