

最難関問題

フィボナッチ数列の問題・1

a , b , c の3つの文字を横一列に並べて文字列を作ります。その際、 a の右側には a か c を、 b の右側には a を必ず並べるようにします。たとえば、 $c b a$ という文字列はこのきまりになら従っていますが、 $a b c$ という文字列は a の右に b があり、 b の右に c があるのできまりに反しています。

- (1) このきまりに従うと、3文字の文字列は何通り作ることができますか。
- (2) このきまりに従うと、8文字の文字列は何通り作ることができますか。
- (3) このきまりに従うと、4文字目と9文字目が b ではないような11文字の文字列は何通り作ることができますか。

最難関問題

フィボナッチ数列の問題・1 (1) 13通り (2) 686通り (3) 6299通り

この問題は、フィボナッチ的な数列の問題です。1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …のように前の2つの数を加えると次の数になるのがフィボナッチ数列, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …のように前の3つの数を加えると次の数になるのはトリボナッチ数列と言われます。しかし、重要なのはこういった法則性を導くための場合分けです。場合分けたそれぞれについて、前の数から計算をしてもとめるという「再帰性」があり、その結果としてできあがった数列にも再帰性が成り立ちます。

(1) 右端に置く文字が a, b, c それぞれの場合について調べ上げます。

1文字の場合

a, b, c で, $1 + 1 + 1 = 3$ (通り) です。

2文字の場合

右端が a となる文字列 a は、右端の a の隣の文字は a, b, c どれでもよいので, $1 + 1 + 1 = 3$ (通り) です。右端が b となる文字列 b は、右端の b の隣の文字は c ですから, 1 通りです。右端が c となる文字列 c は、右端の c の隣の文字は a か c ですから, $1 + 1 = 2$ (通り) です。

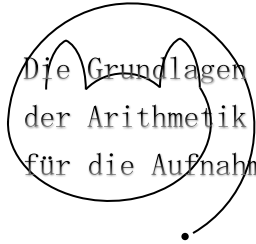
3文字の場合

右端が a となる文字列 a は、右端の a の隣の文字は a, b, c どれでもよいので, $3 + 1 + 2 = 6$ (通り) です。右端が b となる文字列 b は、右端の b の隣の文字は c ですから, 2 通りです。右端が c となる文字列 c は、右端の c の隣の文字は a か c ですから, $3 + 2 = 5$ (通り) です。

表にまとめると、以下のようになります。

文字数(文字)	1	2	3
合計(通り)	3	6	13
<input type="text"/> a(通り)	1	3	6
<input type="text"/> b(通り)	1	1	2
<input type="text"/> c(通り)	1	2	5

よって, $6 + 2 + 5 = 13$ (通り) です。



最難関問題

(2) 同様に調べていくと、以下のようになりますから、686通りです。

文字数(個)	1	2	3	4	5	6	7	8
合計(通り)	3	6	13	29	64	141	311	686
<input type="text"/> a(通り)	1	3	6	13	29	64	141	311
<input type="text"/> b(通り)	1	1	2	5	11	24	53	117
<input type="text"/> c(通り)	1	2	5	11	24	53	117	258

結局のところ、 $13 \times 2 + 3 = 29$ 、 $29 \times 2 + 6 = 64$ 、 $64 \times 2 + 13 = 141$ 、...というように(1つ手前の数) $\times 2 +$ (3つ手前の数)となるわけですが、そういったことに気づくためにも場合分けをした調べ上げが大切です。

(3) 4文字目と9文字目がbはでないので、表の4文字目と9文字目においてbの欄を0にすればよいことがわかります。

文字数(個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
合計(通り)	3	6	13	24	59	131	286	631	1155	2834	6299
<input type="text"/> a(通り)	1	3	6	13	24	59	131	286	631	1155	2834
<input type="text"/> b(通り)	1	1	2	0	11	24	48	107	0	524	1155
<input type="text"/> c(通り)	1	2	5	11	24	48	107	238	524	1155	2310

よって、6299通りです。