受験算数の基礎

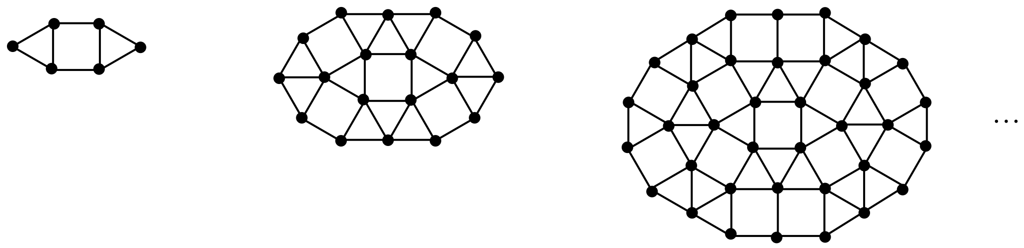
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

グノモン成長

１辺の長さが１cmの正方形１個と正三角形２個を組み合わせて１番目の図形とします。１番目の図形において正方形と正三角形の頂点に●をつけると，６個になります。１番目の図形の正方形には正三角形を，正三角形には正方形を辺がぴったり重なるように組み合わせて，隙間を正三角形で埋めると，２番目の図形ができます。３番目以降の図形も同じ方法で作ります。

１番目　　　２番目　　　３番目　　　…



（１）４番目，５番目，１００番目の図形には●が何個ありますか。

（２）１００番目の図形を作るときに新たに加える１辺１cmの正方形と正三角形は，それぞれ何個ありますか。

最難関問題

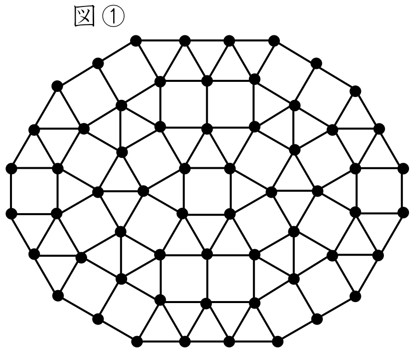
グノモン成長　（１）６０個，９０個，３０３００個　（２）正方形…２９８個，正三角形…５９８個

グノモン成長とは，形が類似したまま（つまり相似でなくともよいということです）大きくなっていくことをいいます。この問題では，正方形と正三角形で平面を敷き詰めるというテッセレーション（有限の種類の図形を平面に隙間なく敷き詰めること）の考えを利用しつつ，途中からはずっと類似した形の十二角形が大きくなっていきます。

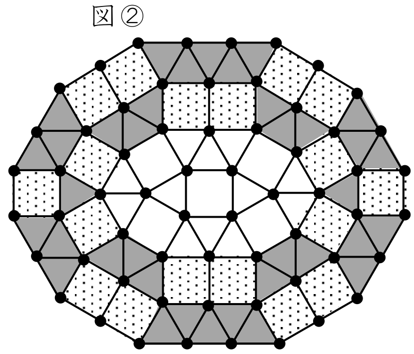
（１）●の個数は，それぞれの図形の周りの長さの分だけ毎回増えていきます。１番目は６個，２番目は６＋１２＝１８（個），３番目は６＋１２＋１８＝３６（個）です。ここまでを見る限り，●の個数は６×（三角数）になっていそうですが，図形全体の形が六角形，十角形，十二角形と変化しているということもありますし，いずれにせよ仕組みを見ていく必要があります。４番目の図形は図①のようになって，３番目と同じく十二角形です。

ここで，３番目から４番目がどのように生じているのかを考えます。図②は３周目と４周目の正方形部分と正三角形部分をぬり分けたものです。きまりにしたがって，３周目の正方形部分の外側には正三角形部分が，正三角形部分の外側には正方形部分が組み合わされています。そして，正方形部分の外側に正三角形部分を加えた６か所において，図形の辺が１㎝ずつ長くなっているので，４周目の周りの長さは１８＋６＝２４（㎝），●の個数は３６＋２４＝６０（個）です。５周目についても図③のようになるので，４周目の正方形部分の外側に正三角形部分を加えた６か所で図形の辺が１㎝ずつ長くなっています。よって，５周目の周りの長さは２４＋６＝３０（㎝），●の個数は６０＋３０＝９０（個）です。

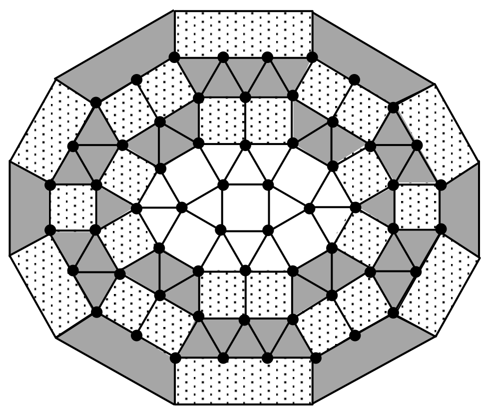
図①



図②



図③



このように，３番目以降の図形では，毎回正方形部分の６か所と正三角形部分の６か所が入れ替わりつつ，正三角形部分については辺の長さが１㎝ずつ長くなっていきます。よって，１００番目の●は，６×（１＋２＋…＋１００）＝３０３００（個）です。

最難関問題

（２）図②，③を見ると，３番目では，周りの長さは正三角形部分のほうが正方形部分よりも２㎝長くなっています。それに対して，４番目の場合，周りの長さは正方形部分は３番目の正三角形部分に等しく，正三角形部分は３番目の正方形部分より６㎝長くなるので，正三角形部分のほうが正方形部分よりも６－２＝４（㎝）長くなります。５番目では同じ仕組みから，正三角形部分のほうが正方形部分よりも６－４＝２（㎝）長くなります。

　このようにして，奇数番目では正三角形部分のほうが正方形部分よりも２㎝長く，偶数番目では正三角形部分のほうが正方形部分よりも４㎝長くなります。１００番目では，正三角形部分と正方形部分の長さの和が６×１００＝６００（㎝）で差が４㎝なので，正三角形部分の長さが３０２㎝，正方形部分の長さが２９８㎝です。よって，正方形の個数は２９８個です。正三角形については，１００番目に新たに加えたもののうち「外側」に置かれるものが３０２個，内側に置かれるものは6か所すべてで１個ずつ少ないので，３０２－６＝２９６（個）ですから，３０２＋２９６＝５９８（個）です。