受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

階差数列と倍数

整数の列ＡとＢがあり，どちらもあるきまりにしたがっています。

列Ａ：１，３， ６， １０，１５，２１，…
列Ｂ：１，５，１２，２２，３５，５１，…

（１）列Ａのなかで，１００で割り切れる最小の数は，左から何番目に並んでいますか。

（２）列Ａのなかで，１３２で割り切れる最小の数は，左から何番目に並んでいますか。

（３）列Ｂのなかで，６０で割り切れる最小の数は，左から何番目に並んでいますか。

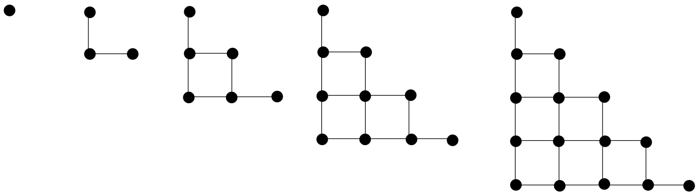
（４）列Ａ，列Ｂの両方で，１６８で割り切れる数が並ぶ最初のところは，左から何番目ですか。

最難関問題

階差数列と倍数　（１）２４番目　（２）３２番目　（３）２７番目　（４）３３６番目

（１）列Ａは，いわゆる三角数で，左から順に１，１＋２，１＋２＋３，１＋２＋３＋４，…となっていますから，左からｎ番目の数は，（１＋ｎ）×ｎ÷２になっています。

【三角数】

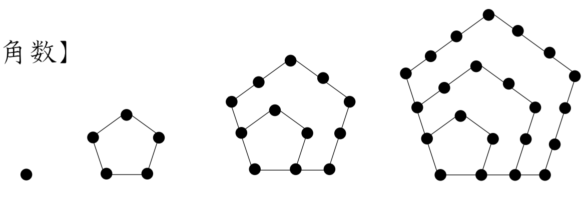


（１＋ｎ）×ｎ÷２が１００の倍数であるということは，（１＋ｎ）×ｎは１００×２＝２００の倍数です。素因数分解すると２００＝２×２×２×５×５ですが，１＋ｎとｎは一方が偶数であれば他方は奇数，一方が５の倍数であれば他方は５の倍数ではないので，１＋ｎとｎのどちらかが８の倍数であり，どちらかが２５の倍数である場合を考えると，条件を満たす最小の場合は，ｎ＝２４，ｎ＋１＝２５のときです。よって，２４番目です。

（２）（１＋ｎ）×ｎ÷２が１３２の倍数であるということは，（１＋ｎ）×ｎは１３２×２＝２６４の倍数です。素因数分解すると２６４＝２×２×２×３×１１です。条件を満たす最小の場合は，ｎ＝３２，ｎ＋１＝３３のときです。よって，３２番目です。

（３）列Ｂは，いわゆる五角数で，左から順に１，１＋４，１＋４＋７，１＋４＋７＋１０，…となっていますから，左からｎ番目の数は，（１＋ｎ×３－２）×ｎ÷２＝（ｎ×３－１）×ｎ÷２になっています。

【五角数】



（ｎ×３－１）×ｎ÷２が６０の倍数であるということは，（ｎ×３－１）×ｎは６０×２＝１２０の倍数です。素因数分解すると１２０＝２×２×２×３×５です。ｎ×３－１は絶対に３の倍数ではないので，ｎは３の倍数です。また，ｎ×３－１とｎは一方だけが偶数となるので，ｎが３×奇数か，３×８＝２４の倍数である場合を順に考えると，ｎ＝２７のときにｎ×３－１＝８０となって条件を満たします。よって，２７番目です。

（４）列Ａのｎ番目の数は（１＋ｎ）×ｎ÷２，列Ｂのｎ番目の数は（ｎ×３－１）×ｎ÷２ですから，その和は（１＋ｎ）×ｎ÷２＋（ｎ×３－１）×ｎ÷２＝ｎ×４×ｎ÷２＝ｎ×ｎ×２となって，平方数の２倍となります。実際，次のようになります。

列Ａ：１，３，　６，　１０，１５，２１，…
列Ｂ：１，５，１２，２２，３５，５１，…
　和：２，８，１８，３２，５０，７２，…

列ＡとＢのｎ番目の数が１６８の倍数であるということは，その和も１６８の倍数ということなので，ｎ×ｎ×２は１６８の倍数，ｎ×ｎは１６８÷２＝８４の倍数ということです。素因数分解をすると，８４＝２×２×３×７なので，ｎは２×３×７＝４２の倍数です。このとき，１＋ｎもｎ×３－１も奇数となるので，（１＋ｎ）×ｎ÷２と（ｎ×３－１）×ｎ÷２が１６８の倍数になるためには，ｎ＝１６８×２＝３３６の倍数でなければならないので，３３６番目が最初です。