最難関問題

２０２０の問題・１１

１２３２１のように，左から読んでも右から読んでも同じになる整数を，回文数といいます。次の問いに答えなさい。

（１）２０２０の約数のうち，回文数となっているものをすべて答えなさい。ただし，１けたの整数は除きます。

（２）（１）で答えた回文数のうち，最も小さいものをＡとします。Ａの倍数について，以下の条件を満たすものはそれぞれ何個ありますか。

①　５桁の回文数

②　６桁の回文数

③　７桁の回文数

最難関問題

２０２０の問題・１１　（１）１０１，２０２，４０４，５０５　（２）①４０個　②４５個　③４４２個

（１）２０２０を素因数分解すると，２０２０＝２×２×５×１０１となります。１０１が回文数となっていることを利用します。

（２）（１）で求めた最小の回文数である１０１の倍数について考えます。
①　２けたの整数ＡＢ×１０１の場合，次のようになって５けたにはなりません。

$$
\begin{array}{r}
AB \\
\times \quad 101 \\ \hline
AB \\
AB \\ \hline
ABAB
\end{array}
$$

３けたの整数ＡＢＣ×１０１の場合，次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
ABC \\
\times \quad 101 \\ \hline
ABC \\
ABC \\ \hline
CBDBC
\end{array}
$$

Ａ＋Ｃにおいて繰り上がりが起こる場合，千の位がＢにならないので，繰り上がりは起きません。よって，次のような場合が考えられます。

$$
\begin{array}{r}
CBC \\
\times \quad 101 \\ \hline
CBC \\
CBC \\ \hline
CBDBC
\end{array}
$$

ＣはＣ＋Ｃがくり上がらないので１以上４以下の整数，Ｂは０以上９以下の整数ですから，
４×１０＝４０（個）です。

最難関問題

②　３けたの整数ＡＢＣ×１０１の場合，次のようになって正しい計算になりません。

$$
\begin{array}{r}
ABC \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABC \\
ABC \\
\hline
CBDDBC
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{r}
99C \\
\times \quad 101 \\
\hline
99C \\
99C \\
\hline
100DBC
\end{array}
\quad \cancel{\Rightarrow} \quad
\begin{array}{r}
991 \\
\times \quad 101 \\
\hline
991 \\
991 \\
\hline
100001
\end{array}
$$

４けたの整数ＡＢＣＤ×１０１の場合，次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
ABCD \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABCD \\
ABCD \\
\hline
DCEECD
\end{array}
$$

ＡとＤ，ＢとＣの関係に注目をして場合分けをします。

$\boxed{\text{Ａ＝Ｄ，Ｂ＝Ｃの場合}}$

次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
ABCD \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABCD \\
ABCD \\
\hline
DCEECD
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{r}
DCCD \\
\times \quad 101 \\
\hline
DCCD \\
DCCD \\
\hline
DCEECD
\end{array}
$$

Ｄは１以上９以下，Ｃは０以上９以下の整数です。また，百の位と千の位がどちらもＥとなって等しいので，Ｄ＋Ｃは繰り上がりません。ＤとＣの和が９以下であればよいので，Ｄ＝１のときＣ＝０～８の９通り，Ｄ＝２のときＣ＝０～７の８通り，…，Ｄ＝９のときＣ＝０の１通りとなって，
９＋８＋…＋１＝４５（個）です。

最難関問題

Ａ＋１＝Ｄの場合

次のようになります。

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & A & B & C & D \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & A & B & C & D \\ & A & B & C & D & & \\ \hline & D & C & E & E & C & D \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} & & & A & 9 & 0 & D \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & A & 9 & 0 & D \\ & A & 9 & 0 & D & & \\ \hline & D & 0 & E & E & 0 & D \end{array}$$

Ａ＋１＝ＤよりＤは２以上の整数ですから，９＋Ｄは繰り上がります。よって，９＋Ｄの一の位である百の位ＥはＤより１小さい数であるＡとなります。他方で，千の位は繰り上がりによってＡ＋１となるので，矛盾します。

Ａ＝Ｄ，Ｂ＋１＝Ｃの場合

Ａ＝Ｄより，次のようになります。

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & A & B & C & D \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & A & B & C & D \\ & A & B & C & D & & \\ \hline & D & C & E & E & C & D \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} & & & D & B & C & D \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & D & B & C & D \\ & D & B & C & D & & \\ \hline & D & C & E & E & C & D \end{array}$$

Ｂ＋Ｄが繰り上がるにせよ繰り上がらないにせよ，Ｂ＋Ｄの一の位とＣ＋Ｄ＝Ｂ＋１＋Ｄの一の位が等しくなることはあり得ないので，条件を満たしません。

以上より，４５個です。

最難関問題

②　４けたの整数ＡＢＣ×１０１の場合，次のようになって，１０００００１の１個です。

$$
\begin{array}{r}
ABCD \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABCD \\
ABCD \\
\hline
DCFGFCD
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r}
AB01 \\
\times \quad 101 \\
\hline
9901 \\
9901 \\
\hline
100G001
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r}
AB01 \\
\times \quad 101 \\
\hline
9901 \\
9901 \\
\hline
1000001
\end{array}
$$

５けたの整数ＡＢＣＤＥ×１０１の場合，次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
ABCDE \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABCDE \\
ABCDE \\
\hline
EDFGFDE
\end{array}
$$

ＡとＥ，ＢとＤの関係に注目をして場合分けをします。

$\boxed{\text{Ａ＝Ｅ，Ｂ＝Ｄの場合}}$

次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
ABCDE \\
\times \quad 101 \\
\hline
ABCDE \\
ABCDE \\
\hline
EDFGFDE
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r}
EDCDE \\
\times \quad 101 \\
\hline
EDCDE \\
EDCDE \\
\hline
EDFGFDE
\end{array}
$$

百の位と一万の位が等しいことから，Ｄ＋Ｄは繰り上がりません。また，十の位と十万の位が等しいことから，Ｃ＋Ｅも繰り上がりません。よって，Ｄは０以上４以下の整数なので５通りです。また，Ｅは１以上９以下，Ｃは０以上９以下の整数で，ＥとＣの和が９以下であればよいので，Ｅ＝１のときＣ＝０～８の９通り，Ｅ＝２のときＣ＝０～７の８通り，…，Ｅ＝９のときＣ＝０の１通りとなって，９＋８＋…＋１＝４５（通り）です。よって，５×４５＝２２５（個）です。

最難関問題

Ａ＋１＝Ｅの場合

次のようになります。

```
    ＡＢＣＤＥ            Ａ９Ｃ０Ｅ
×     １０１          ×     １０１
────────          ────────
    ＡＢＣＤＥ     ⇨      Ａ９Ｃ０Ｅ
ＡＢＣＤＥ            Ａ９Ｃ０Ｅ
────────          ────────
ＥＤＦＧＦＤＥ          Ｅ０ＦＧＦ０Ｅ
```

Ａ＋Ｃは繰り上がるので，Ｅ＋Ｃ＝Ａ＋１＋Ｃもくり上がります。その結果千の位は，１＋９＝１０よりＧ＝０となって繰り上がるので，Ａ＋Ｃの一の位はＥ＋Ｃの一の位と等しくなります。このとき，Ａは１以上８以下の整数，Ｃは０以上９以下の整数でＡとＣの和が１０以上であればよいので，Ａ＝１のときＣ＝９の１通り，Ａ＝２のときＣ＝８，９の２通り，…，Ａ＝８のときＣ＝２〜９の８通りとなって，１＋２＋…＋８＝３６（個）です。

Ａ＝Ｅ，Ｂ＋１＝Ｄの場合

次のようになります。

```
    ＡＢＣＤＥ            ＥＢＣＤＥ
×     １０１          ×     １０１
────────          ────────
    ＡＢＣＤＥ     ⇨      ＥＢＣＤＥ
ＡＢＣＤＥ            ＥＢＣＤＥ
────────          ────────
ＥＤＦＧＦＤＥ          ＥＤＦＧＦＤＥ
```

百の位と一万の位がどちらもＣ＋Ｅの一の位であることから，千の位のＢ＋Ｄは繰り上がりません。また，十の位と十万の位が等しいことから，Ｃ＋Ｅは繰り上がります。よって，千の位はＢ＋Ｄ＋１＝Ｂ＋Ｂ＋２でくり上がらないので，Ｂは０以上３以下の４通りです。また，Ｅは１以上９以下，Ｃは０以上９以下の整数でＥとＣの和が１０以上であればよいので，Ａ＝１のときＣ＝９の１通り，Ａ＝２のときＣ＝８，９の２通り，…，Ａ＝９のときＣ＝１〜９の９通りとなって，１＋２＋…＋９＝４５（通り）です。よって，４×４５＝１８０（個）です。

以上より，１＋２２５＋３６＋１８０＝４４２（個）です。