受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

立方体に内接する四面体

１辺４㎝の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがあります。また，直角をはさむ２辺の長さがの比が３：４の三角形において，３辺の長さの比は３：４：５となります。

（１）図１において，ＡＩ＝１㎝で，点Ｊと点Ｋはそれぞれ立方体の辺の中点です。このとき，四面体ＩＪＫＣの体積を求めなさい。

（２）図２において，ＡＩ＝１㎝，点Ｊは辺ＦＧの中点，点Ｋは対角線ＣＨとＤＧの交点です。このとき，四面体ＩＪＫＣの体積を求めなさい。

（３）図３において，ＡＩ＝ＣＬ＝１㎝，点Ｊは辺ＦＧの中点，点Ｋは対角線ＣＨとＤＧの交点です。このとき，四面体ＩＪＫＬの体積を求めなさい。

図１

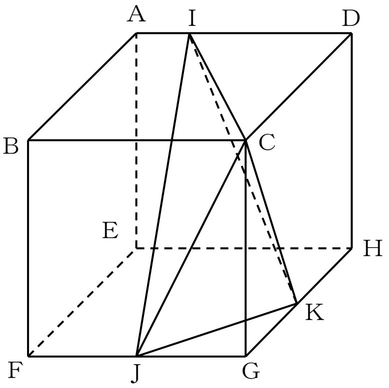


図２

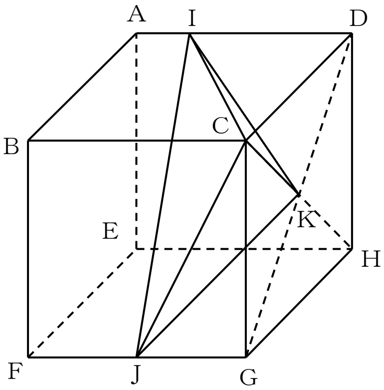
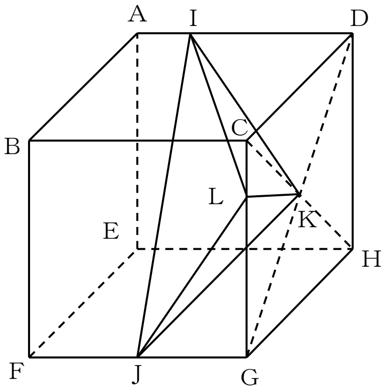


図３



受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

立方体に内接する四面体（１）$9\frac{1}{3}$㎤　（２）$6\frac{2}{3}$㎤　（３）５㎤

（１）図４において，長方形ＩＣＧＭを作り，ＧＭとＪＫの交点をＮとします。ＩＣ＝５㎝，ＣＧ＝４㎝ですから，三角形ＩＣＮの面積は$5\times4\times\frac{1}{2}=10$（㎠）です。長方形ＩＣＧＭが立方体の底面に対して垂直となっているので，四面体ＩＪＫＣを三角形ＩＣＮを底面とする２つの三角すいＪ－ＩＣＮとＫ－ＩＣＮをあわせた立体として，体積を求めます。

三角すいの高さを求めるために，立方体を上から見た図５に，点ＪおよびＫを通ってＩＣと平行な直線をかきこみます。○と●で示した角度の関係により，影をつけた直角三角形は辺の長さの比が３：４：５となりますから，□＝$(2+1.5)\times\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$（㎝）です。これが２つの三角すいの高さの和ですから，$10\times\frac{14}{5}\times\frac{1}{3}=9\frac{1}{3}$（㎤）です。

図４

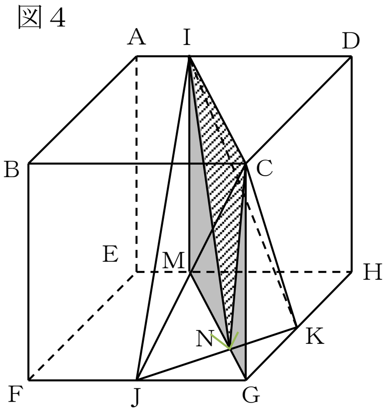
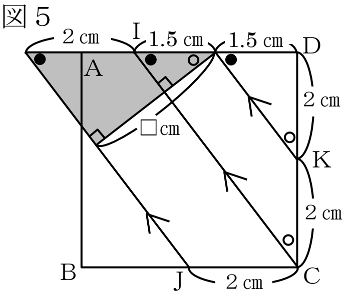


図５



最難関問題

（２）図６において，（１）同様に長方形ＩＣＧＭを作り，ＪＫとの交点をＮとします。四面体ＩＪＫＣを，三角形ＩＣＮを底面とする２つの三角すいＪ－ＩＣＮとＫ－ＩＣＮをあわせた立体として，体積を求めます。

三角形ＩＣＮにおいて，長さ５㎝の辺ＩＣを底辺としたときの高さを求めるために，立方体を真上から見た図７と真正面から見た図８を利用します。図７において，影をつけた三角形の相似によりＫＮ：ＮＪ＝３：４です。図８において点Ｋは立方体の底面ＥＦＧＨから２㎝の高さにあり，点Ｊは底面ＥＦＧＨに含まれますから，点Ｎは底面ＥＦＧＨから$2\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$（㎝）の高さにあります。よって，三角形ＩＣＮの高さは$4-\frac{8}{7}=\frac{20}{7}$（㎝）です。こうして，三角形ＩＣＮの面積が

$5\times\frac{20}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{50}{7}$（$cm^2$）であることがわかります。

２つの三角すいＪ－ＩＣＮとＫ－ＩＣＮの高さの和は（１）と同じく$\frac{14}{5}$㎝ですから，体積の和は，

$\frac{50}{7}\times\frac{14}{5}\times\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}$（$cm^3$）です。

図６

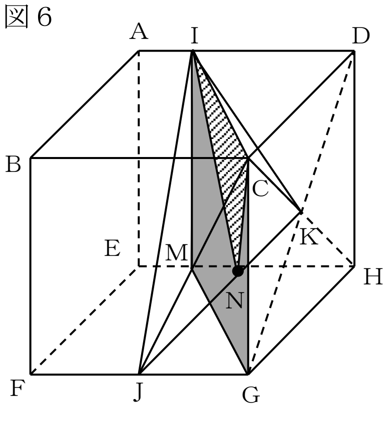


図７

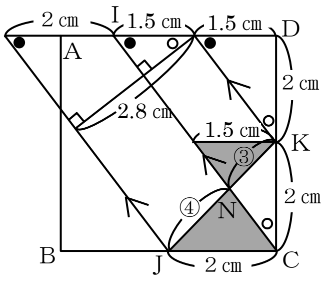
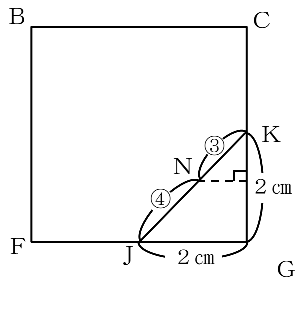


図８



最難関問題

（３）図９において，（２）同様に長方形ＩＣＧＭを作り，ＪＫとの交点をＮとして，四面体ＩＪＫＬを三角形ＩＬＮを底面とする２つの三角すいＪ－ＩＬＮとＫ－ＩＬＮをあわせた立体として，体積を求めます。

まず，三角形ＩＬＮの面積を求めます。立方体を真上から見た図１０において，$OC=\frac{5}{2}$cmですから，

$NC=\frac{5}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{7}$（cm）です。よって，（２）で求めた点Ｎの面ＥＦＧＨからの高さが$\frac{8}{7}$cmであることとあわせると，図１１のようになります。図１１において，三角形ＩＬＮの面積は長方形ＩＣＧＭからよけいな図形の面積を引く事で求めます。

$5\times4-\{5\times1\times\frac{1}{2}+\frac{13}{7}\times\frac{10}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{8}{7}\times\frac{10}{7}+(4+\frac{8}{7})\times\frac{25}{7}\times\frac{1}{2}\}=\frac{75}{14}$（$cm^2$）です。

図９

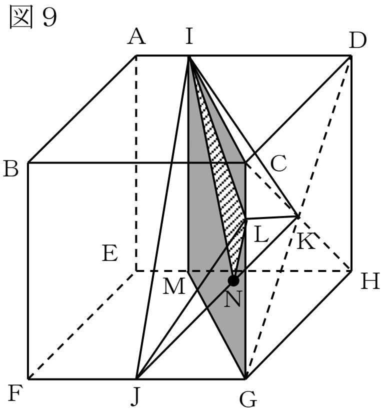


図１０

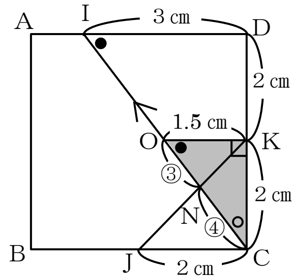
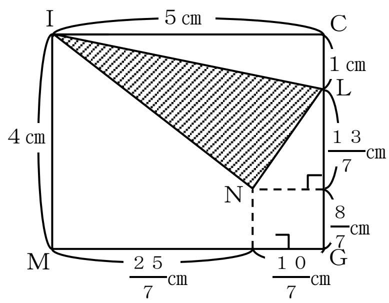


図１１



２つの三角すいＪ－ＩＬＮとＫ－ＩＬＮの高さの和は（１）（２）と同じく$\frac{14}{5}$cmですから，体積の和は，$\frac{75}{14}\times\frac{14}{5}\times\frac{1}{3}=5$（$cm^3$）です。