最難関問題

アルキメデスの立体・切頂立方体

図１のように立方体Ｙの８個の頂点を切り落として,全ての面が正三角形か正八角形である図２の立体Ｘを作ったところ，立体Ｘの１辺の長さは１㎝になりました。次の問いに答えなさい。

図１

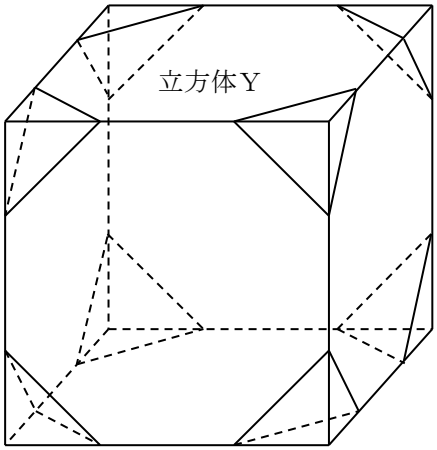
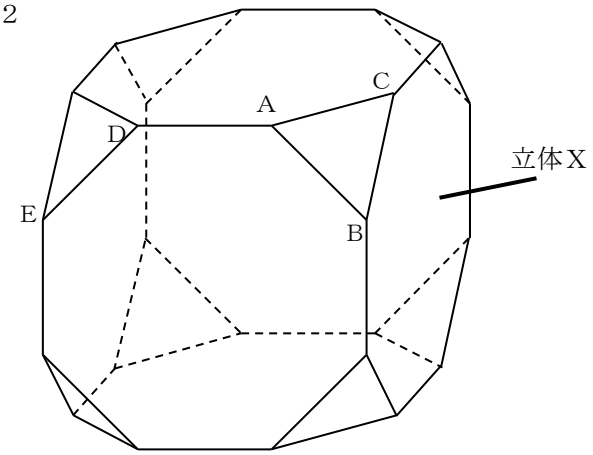


図２



（１）立体Ｘを，頂点Ｄを通り，面ＡＢＣと平行な面で切断したときの切り口をＵとします。切り口Ｕの周りの長さは立方体Ｙの１辺の長さの何倍ですか。

（２）立体Ｘを，辺ＤＥの中点Ｍを通り，面ＡＢＣと平行な面で切断したときの切り口をＶとします。切り口ＵとＶの面積について次の式が成り立つように，［あ］，［い］にあてはまる数を答えなさい。

（切り口Ｕの面積）×［あ］－（面ＡＢＣの面積）×［い］＝（切り口Ｖの面積）

（３）立体Ｘを，頂点Ｅを通り，面ＡＢＣと平行な面で切断したときの切り口をＷとします。切り口ＵとＷの面積について次の式が成り立つように，［う］，［え］にあてはまる数を答えなさい。

（切り口Ｕの面積）×［う］－（面ＡＢＣの面積）×［え］＝（切り口Ｗの面積）

最難関問題

アルキメデスの立体・切頂立方体（１）３倍　（２）［あ］＝２，［い］＝０.７５
（３）［う］＝３，［え］＝１

立体Ｘは正三角形８個と正八角形６個からなるすべての辺の長さが等しい１４面体で,立方体の頂点を切り落として作ることができるために切頂立方体といいます。すべての面が合同である正四面体や立方体，正八面体といった正多面体に対し,面の形が２種類以上あるこのような多面体をアルキメデスの立体といいます。

（１）切断面Ｕは図３のような正三角形になります。切断面Ｕの辺ＤＦの長さを求めるために，立方体Ｙの上の面をかきだすと，図４のようになります。斜線で示した４個の直角二等辺三角形は合同ですから，○をつけた辺の長さはすべて等しくなります。１＋○×２＝（立方体Ｙの１辺の長さ）＝（辺ＤＦの長さ）ですから，切断面Ｕの周りの長さは立方体Ｙの１辺の長さの３倍です。

図３

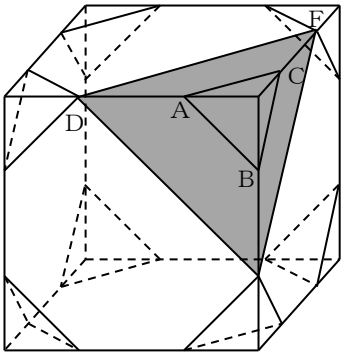
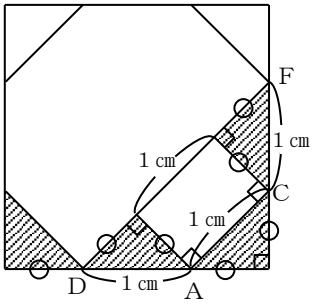


図４



最難関問題

（２）切断面Ｖは図５のように，立方体Ｙの頂点Ｇ，Ｈ，Ｉを結んでできる正三角形から斜線部分の正三角形を切り落とした六角形になります。正三角形ＧＨＩをかきぬくと図６のようになります。ＤＦ×ＤＦ＝（立方体Ｙの１つの面の面積）＝ＧＩ×ＧＩ÷２ですから，ＤＦ×ＤＦ：ＧＩ×ＧＩ＝１：２です。よって，正三角形ＧＨＩの面積は切断面Ｕの面積の２倍です。

次に，斜線部の正三角形の面積を考えます。ＧＭ＝１÷２＝0.５（㎝）ですから，斜線部の正三角形１つの面積は，１辺１㎝の正三角形である面ＡＢＣの面積の0.５×0.５＝0.２５（倍）です。よって，３個あわせると0.２５×３＝0.７５（倍）です。

以上より，（切りロＵの面積）×２－（面ＡＢＣの面積）×0.７５＝（切りロＶの面積）となりますから，［あ］＝２，［い］＝0.７５です。

図５

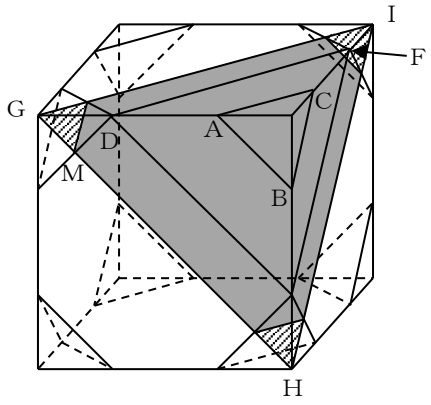
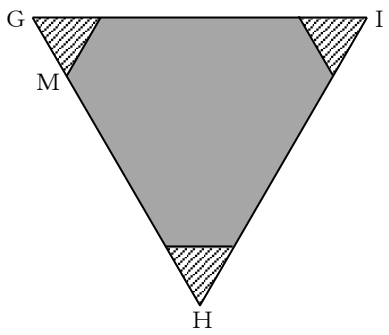


図６



最難関問題

（３）切断面Ｗは図７のように，正三角形ＬＭＮから斜線部分の正三角形を切り落とした六角形になります。正三角形ＬＭＮをかきぬくと図８のようになります。正三角形ＬＭＮと切断面Ｕの面積を比べるために，立方体Ｙの上の面をかきぬくと，図９のようになります。

図９において，ＤＦを直角に向かい合う辺とする直角二等辺三角形ＯＤＦの面積を①とすると，ＤＦの長さは正方形の１辺の長さと等しいので，正方形の面積は④となり，ＬＮを直角に向かい合う辺とする直角二等辺三角形ＯＬＮの面積は③＋（底辺が１㎝の直角二等辺三角形）×２となります。

図１０のように直角二等辺三角形と正三角形をぴったり重ねたときの正三角形の面積を，直角二等辺三角形の面積の□倍とします。すると，切断面Ｕの面積は①×□，正三角形ＬＭＮの面積は③×□＋（底辺が１㎝の直角二等辺三角形）×２×□＝③×□＋（底辺が１㎝の正三角形）×２となります。つまり，正三角形ＬＭＮは切断面Ｕの３倍よりも１辺の長さが１㎝の正三角形２個分だけ大きいということです。

ここで図８にもどると，切断面Ｗは正三角形ＬＭＮより１辺の長さが１㎝の正三角形３個分小さいので，（切りロＵの面積）×３＋（１辺１㎝の正三角形の面積）×２－（１辺１㎝の正三角形の面積）×３＝（切りロＵの面積）×３－（１辺１㎝の正三角形の面積）×１より，切断面Ｕの３倍よりも１辺の長さが１㎝の正三角形１個分だけ小さいということになります。

以上より，（切りロＵの面積）×３－（面ＡＢＣの面積）×１＝（切りロＶの面積）となりますから，［う］＝３，［え］＝１です。

図７

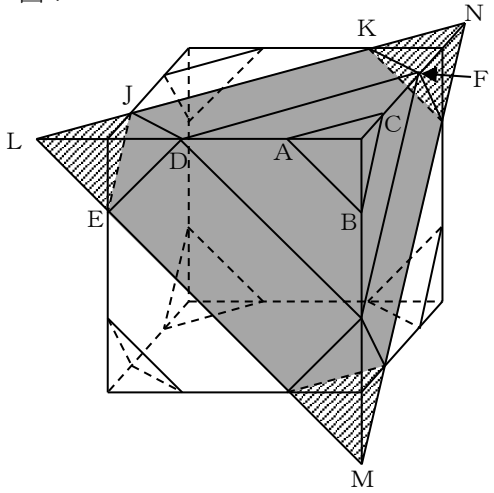


図８

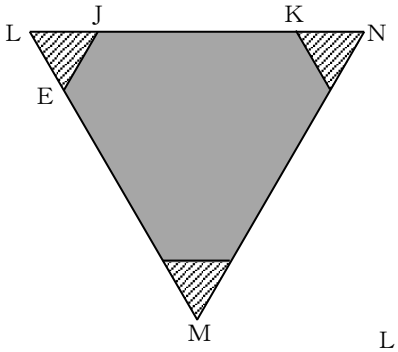


図９

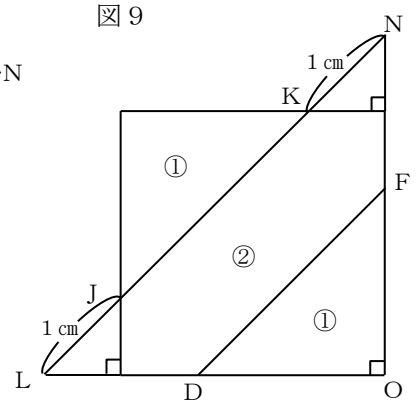
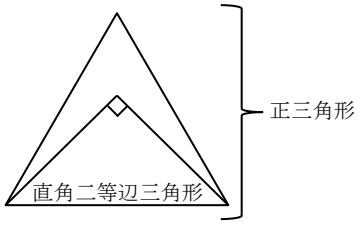



図 10