

最難関問題

$$2 \times \dots \times 2 / 5 \times \dots \times 5$$

$\frac{4}{125}$ のように、分子が2をいくつかかけ合わせた数、分母が5をいくつかかけ合わせた数である真分数を小数にします。

$$\frac{4}{125} = \frac{2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{1000} \text{より, } \frac{4}{125} = 0.032,$$

$$\frac{16}{25} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 2 \times 2} = \frac{64}{100} \text{より, } \frac{16}{25} = 0.64 \text{です。}$$

このとき、小数点以下で初めて0以外の数が現れたところから並ぶ数を、【】で表します。

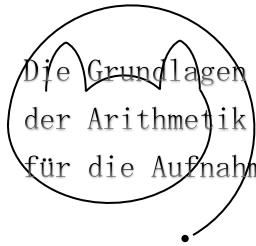
例えば、 $\left[\frac{4}{125}\right] = 32$ 、 $\left[\frac{16}{25}\right] = 64$ です。

(1) $\left[\frac{\square}{625}\right]$ の値として考えられる整数のうち最も大きいものは、2を何個かけ合わせた数ですか。

5を3個かけ合わせた数である125以下で最大の2をかけ合わせてできる整数は、2を6個かけ合わせた数である64です。このように、5を○個かけ合わせた数以下で最大の2を△個かけ合わせた数について、△と○の関係を表にまとめると、次のようになります。

△	2	4	6	9	11	13	16	18	20	23	25	27	30	32	34	...
○	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

(2) $\left[\frac{\square}{5 \times \dots \times 5}\right]$ の値が2を41個かけ合わせた整数になるとき、分母の $5 \times \dots \times 5$ は、最も少なくて5を何個かけ合わせていますか。必要であれば上の表を利用して求めなさい。



最難関問題

$$2 \times \dots \times 2 / 5 \times \dots \times 5 \quad (1) \quad 13 \text{ 個} \quad (2) \quad 13 \text{ 個}$$

(1) $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$ で、2 をかけ合わせてできる 625 以下の最大の整数は、
 $512 = \underbrace{2 \times \dots \times 2}_{9 \text{ 個}}$ です。

$$\frac{512}{625} = \frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{9 \text{ 個}}}{\underbrace{5 \times \dots \times 5}_{4 \text{ 個}}} = \frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{13 \text{ 個}}}{\underbrace{5 \times \dots \times 5}_{4 \text{ 個}} \times \underbrace{2 \times \dots \times 2}_{4 \text{ 個}}} = \frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{13 \text{ 個}}}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{4 \text{ 個}}}$$

となるので、13 個です。

(2) 例及び (1) から、

$$\frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{\Delta \text{ 個}}}{\underbrace{5 \times \dots \times 5}_{\text{O 個}}} = \frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{\Delta + \text{O 個}}}{\underbrace{5 \times \dots \times 5}_{\text{O 個}} \times \underbrace{2 \times \dots \times 2}_{\text{O 個}}} = \frac{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{\Delta + \text{O 個}}}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\text{O 個}}}$$

となるのがわかります。 $\Delta + \text{O} = 41$ で、真分数であるという条件から、

$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{\Delta \text{ 個}} < \underbrace{5 \times \dots \times 5}_{\text{O 個}}$$

となればよいので、条件を満たす Δ と O の組み合わせで

O が最小となるのは、与えられた表より、 $(\Delta, \text{O}) = (28, 13)$ の場合です。
 よって、13 個です。