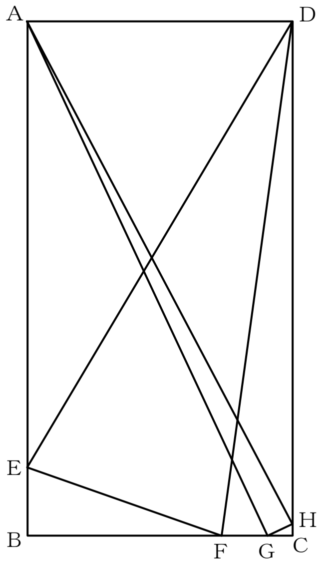
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

相似と垂直・２

　下の図の長方形ＡＢＣＤにおいて，辺ＡＢ上に点Ｅがあり，ＢＥの長さは６.７５㎝，辺ＢＣ上に点Ｆ，Ｇがあり，ＢＦの長さは２０.２５㎝，ＣＧの長さは$2\frac{2}{3}$㎝，辺ＣＤ上に点Ｈがあり，ＣＨの長さは$1\frac{1}{3}$㎝です。このとき，三角形ＡＧＨは辺ＡＧとＡＨの長さが等しい二等辺三角形，三角形ＤＥＦは辺ＤＥとＤＦの長さが等しい二等辺三角形になりました。三角形ＤＥＦの面積を求めなさい。



受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

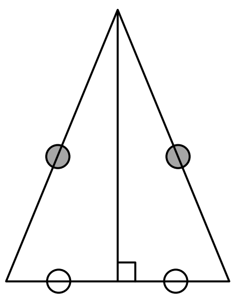
相似と垂直・２　５０２$\frac{1}{32}$$\mathrm{cm}^2$

　図①のように，二等辺三角形の頂角から底辺に垂直な線を引くと，底辺の長さは二等分されます。そこで，図②のように二等辺三角形ＤＥＦの頂角Ｄから辺ＥＦに垂直な線を引き，辺ＥＦとの交点をＩ，辺ＢＣとの交点をＪとし，二等辺三角形ＡＧＨの頂角Ａから辺ＧＨに垂直な線を引き，辺ＧＨとの交点をＫ，辺ＢＣとの交点をＬとします。

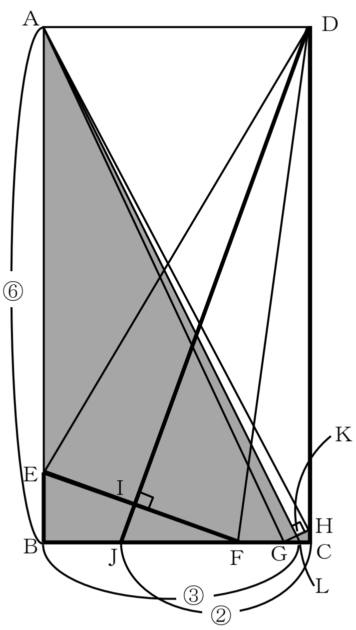
　ここで図③のような方眼を考えると，直線㋐と垂直に交わる直線㋑は，○＋●＝９０度であることから，影をつけた三角形が相似になります。垂直に交わります。また，㋑と平行な直線㋒も，㋐と垂直に交わります。よって，図②において影をつけた三角形ＡＢＬとＧＣＨ，太線で囲んだ三角形ＤＣＪとＦＢＥは相似です。

　三角形ＧＣＨにおいて辺ＧＣとＣＨの長さの比は，$2\frac{2}{3}$：$1\frac{1}{3}$＝２：１なので，三角形ＡＢＬにおいて辺ＡＢとＢＬの長さの比は２：１です。また，三角形ＦＢＥにおいて辺ＦＢとＢＥの長さの比は，$20\frac{1}{4}$：$6\frac{3}{4}$＝３：１なので，三角形ＤＣＪにおいて辺ＤＣとＣＪの長さの比は３：１です。よって，辺ＡＢの長さを⑥とすると，ＢＬの長さは③，ＣＪの長さは②となります。

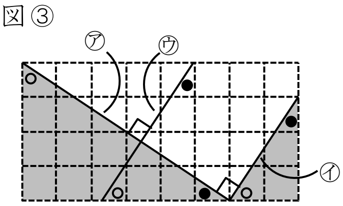
図①



図②



図③



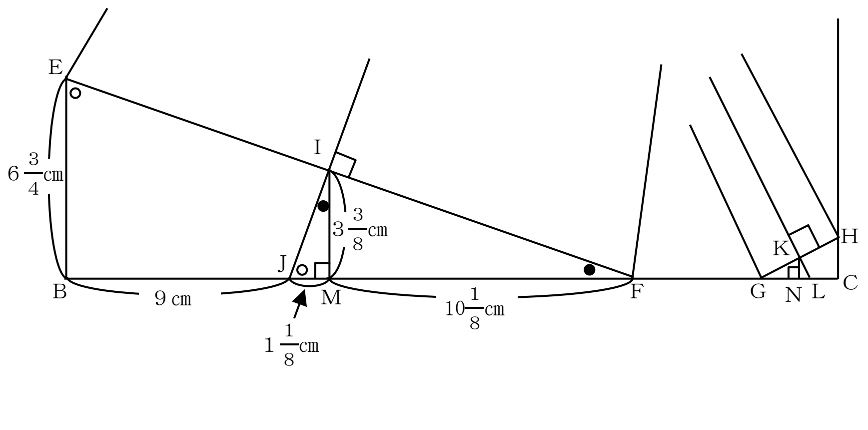
最難関問題

図④において，点ＩとＫから辺ＢＣに垂直な線を引き，辺ＢＣとの交点をＭ，Ｎとします。ＥＢの長さは $6\frac{3}{4}$cmなので，ＩＭの長さは $6\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=3\frac{3}{8}$（cm）です。ＩＭとＭＦの長さの比は，ＥＢとＢＦの長さの比に等しく１：３なので，ＭＦの長さは $3\frac{3}{8}\times3=10\frac{1}{8}$（cm），ＪＭとＩＭの長さの比も１：３なので，$\text{JM}=3\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=1\frac{1}{8}$（cm）です。よって，ＢＪの長さは $20\frac{1}{4}-\left(1\frac{1}{8}+10\frac{1}{8}\right)=9$（cm）です。同様にして，ＬＣの長さは１cmです。ここで，ＣＪの長さは②，ＢＬの長さは③であることから，
ＢＣ＝②＋９＝③＋１より，①＝９－１＝８（cm）です。よって，
長方形の辺ＡＢの長さは⑥＝８×６＝４８（cm），ＢＣの長さは②＋９＝８×２＋９＝２５（cm）です。

三角形ＤＥＦの面積は，長方形ＡＢＣＤの面積から周りの三角形の面積を引くことで求めます。図⑤において，長方形ＡＢＣＤの面積は，４８×２５＝１２００（cm^2），三角形ＡＥＣの面積は，
$41\frac{1}{4}\times25\times\frac{1}{2}=515\frac{5}{8}$（cm），三角形ＥＢＦの面積は，$6\frac{3}{4}\times20\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=68\frac{11}{32}$（cm），
三角形ＦＣＤの面積は，$4\frac{3}{4}\times48\times\frac{1}{2}=114$（cm）なので，三角形ＤＥＦの面積は，

$1200-\left(515\frac{5}{8}+68\frac{11}{32}+114\right)=502\frac{1}{32}$（cm^2）です。

図④



図⑤