

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

1 分母 7 の分数の 6 桁サイクル

(1) 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 を 7 で割った余りを答えなさい。

(2)

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots, \quad \frac{2}{7} = 0.285714285714\ldots,$$

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots, \quad \frac{4}{7} = 0.571428571428\ldots,$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285714285\ldots, \quad \frac{6}{7} = 0.857142857142\ldots,$$

となって、分母が 7 の分数はそれぞれが 6 桁周期で同じ数の並びを繰り返し、さらにその 6 桁は、142857 を最初あるいは途中から始めて一周させた並びになっています。その理由を説明しなさい。

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

2 7 の倍数の 6 桁サイクル

(1) $1, 10, 100, 1000, \dots$ のように一番上の位の数に 1 で残りの位が 0 である数を小さいほうから順に 7 で割っていくとき、余りが 1 となる 10 番目の数は何桁の整数ですか。

(2) 6 桁の整数 $abcdef$ が 7 の倍数のとき、この数の並びを途中から始めて一周させた、 $bcd ef a, cde f a b, def a b c, e f a b c d, f a b c d e$ も 7 の倍数になります。
(b, c, d, e, f のどれかが 0 であった場合は、その数が一番上の位にきた数は 5 桁以下の 7 の倍数になります。)

その理由を説明しなさい。

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

3 分母 7 の分数と 7 の剰余の 6 桁サイクル

(1) 各位の数がすべて 9 の整数のうちで、7 の倍数である最小の整数を答えなさい。

(2) 6 桁の整数 $a b c d e f$ を 7 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の場合に,
 $a b c d e f$ に最も少なくて 10 を何個かければ余りが同じになるかをそれぞれ答えなさい。

(3) (1) より、分母が 7 の分数を小数にした場合、小数部分が 6 桁のくり返しになり、かつ、5 桁以下のくり返しにはならない理由を説明しなさい。

(4) (1) を利用して、分母が 7 の分数 A を小数にした場合の小数部分が $a b c d e f$ のくり返しになっているとき、 $A \times 10$ を小数にした場合の小数部分が $b c d e f a$ のくり返しになる理由を説明しなさい。

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

(5) 以上を踏まえて、 $\frac{1}{7}$ を小数にした場合の小数部分が 1 4 2 8 5 7 のくり返しであり、ここから周期に

おいて並ぶ数を 1 つずつずらした 4 2 8 5 7 1 のくり返しになるのが $\frac{3}{7}$, 2 8 5 7 1 4 のくり返しにな

るのが $\frac{2}{7}$, という順に並べていくと、 $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ となる理由を説明しなさい。

(6) 以上を踏まえて、2 (2) を別の仕方で説明しなさい。

(7) 6 桁の整数 $a b c d e f$ を 7 で割った余りが m のとき、

○ $a b c d e f \times 10$ を 7 で割った余り x

○ $b c d e f a$ を 7 で割った余り y

○ $\frac{m}{7} \times 10$ を計算して帯分数にしたときの分数部分 $\frac{z}{7}$

○ $\frac{m}{7} = 0.p q r s t u p q r \dots$ のときの、 $\frac{w}{7} = 0.q r s t u p q r s \dots$

について、 $x = y = z = w$ となることを説明しなさい。

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

① (1) 順に, 1, 3, 2, 6, 4, 5 (2) 解説参照

② (1) 5 5 桁 (2) 解説参照

③ (1) 9 9 9 9 9 9 (2) 0...1 個, 1~6...6 個 (3) ~ (7) 解説参照

①

- (1) 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 という 1 から始まり毎回 10 倍することで得られる数を 7 で割った余りを考えます。10 を 7 で割った余りは 3 なので, 余りを順に 3 倍していき 7 以上になったときはそれを 7 で割った余りを求めると,
- 1, $1 \times 3 = 3$, $3 \times 3 = 9$ より 2, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 3 = 18$ より 4, $4 \times 3 = 12$ より 5, $5 \times 3 = 15$ より 1 となって, 1, 3, 2, 6, 4, 5 という 6 個の数のくり返しになります。
- よって, 答えは順に 1, 3, 2, 6, 4, 5 です。

- (2) $\frac{1}{7} = 0.142857\cdots$ を 100 倍すると, $14.285714\cdots$ となって, 142857 の途中から始めて一周させた並びが小数部分で繰り返される。また, 100 を 7 で割った余りは 2 なので,
- $\frac{2}{7} = 0.285714\cdots$ となる。1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 を 7 で割った余りは 1, 3, 2, 6, 4, 5 なので, $\frac{1}{7} \sim \frac{6}{7}$ と $0.142857\cdots$ を 1 倍, 10 倍, 100 倍, 1000 倍, 10000 倍, 100000 倍した数の小数部分は 1 対 1 で対応する。

②

- (1) ① (1) より, 1, 3, 2, 6, 4, 5 のくり返しになるので, 1, 10, 100, ... の数列において, $1 + 6 \times (10 - 1) = 55$ (番目) の数ですから, 55 桁です。
- (2) $abcdef$ を 10 倍した, $abcdef0$ も 7 の倍数。 $abcdef0$ を 7 で割った余りは, $1 \times a + 5 \times b + 4 \times c + 6 \times d + 2 \times e + 3 \times f + 1 \times 0$ を 7 で割った余りに等しくなるので, $5 \times b + 4 \times c + 6 \times d + 2 \times e + 3 \times f + 1 \times a$ は 7 の倍数。
- よって, $bcdefa$ も 7 の倍数。以降も同様にずらしていけるので, すべて 7 の倍数になる。

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

3

(1) 1 (1) より, 1, 1 0 0 0 0 0 0 のように, 1 の後に 0 が 6 の倍数個並ぶ数は, 7 で割ると余りが 1 になります。よって, $1 0 0 0 0 0 0 - 1 = 9 9 9 9 9 9$ は 7 の倍数です。

(2) 1 を 7 で割った余りは 1, 1 0 0 0 0 0 0 は $9 9 9 9 9 9 + 1$ なので 7 で割った余りは 1 となるので, 6 桁の整数 a b c d e f を 7 で割った余りは,

1 0 を 1 個かけると余りは 3 倍, 2 個かけると余りは 2 倍, 3 個かけると余りは 6 倍, 4 個かけると余りは 4 倍, 5 個かけると余りは 5 倍, 6 個かけると余りは 1 倍されてから, 7 以上になった場合は 7 で割った余りになります。よって, 以下の表のようにまとめられます。

もとの余り	10 倍	100 倍	1000 倍	10000 倍	100000 倍	1000000 倍
0	0	0	0	0	0	0
1	3	2	6	4	5	1
2	6	4	5	1	3	2
3	2	6	4	5	1	3
4	5	1	3	2	6	4
5	1	3	2	6	4	5
6	4	5	1	3	2	6

7 で割った余りが同じになるのは, 0 の場合は 1 0 を 1 個, 残りの場合は 1 0 を 6 個です。

(3) 分母が 7 の分数の分数部分である, $\frac{\square}{7} = \frac{\triangle}{9 9 9 9 9 9}$ となるので小数にすると 6 桁ごとのくり返し

になり, また, 7 が素数であることから, $\frac{\square}{7}$ は既約分数なので, 分母が 9...9 の分数と通分する場合は 9 9 9 9 9 9 が最小だから。

(4) A の分数部分である, $\frac{\square}{7} = \frac{a b c d e f}{9 9 9 9 9 9}$ であり,

$$\begin{aligned} \frac{a b c d e f}{9 9 9 9 9 9} \times 10 &= \frac{a \times 1 0 0 0 0 0 0 \times 10}{9 9 9 9 9 9} + \frac{b c d e f \times 10}{9 9 9 9 9 9} \\ &= a \frac{a}{9 9 9 9 9 9} + \frac{b c d e f 0}{9 9 9 9 9 9} = a \frac{b c d e f a}{9 9 9 9 9 9} \text{ となるから。} \end{aligned}$$

分母 7 の分数と 7 の倍数の 6 桁サイクル

(5) $999999 \div 7 = 142857$ なので, $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}$ であり,

$$\frac{1}{7} \times 10 = \frac{142857}{999999} \times 10 = 1 \frac{428571}{999999},$$

$$\frac{1}{7} \times 100 = \frac{142857}{999999} \times 100 = 14 \frac{285714}{999999},$$

…となって周期に並ぶ数は 1 つずつずれていく。

また, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 を 7 で割った余りは

1, 3, 2, 6, 4, 5 なので, $\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{100}{7}, \frac{1000}{7}, \frac{10000}{7}, \frac{100000}{7}$ の分数部

分は $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$, となるから。

(6) $abcdef$ は 7 の倍数なので, 10 倍しても 7 の倍数。

$abcdef0 = a \times 1000000 + bcd ef 0 = a \times (999999 + 1) + bcd ef 0$
 $= a \times 999999 + bcd ef a$ は 7 の倍数で, $a \times 999999$ も 7 の倍数なので, $bcd ef a$
 も 7 の倍数になる。これを繰り返せば、ほかの並びも 7 の倍数になる。

(7) $abcdef \times 10 = abcdef0$ を 7 で割った余りは,

$1 \times a + 5 \times b + 4 \times c + 6 \times d + 2 \times e + 3 \times f + 1 \times 0$ を 7 で割った余りに等しく,

$bcd ef a$ を 7 で割った余りは,

$5 \times b + 4 \times c + 6 \times d + 2 \times e + 3 \times f + 1 \times a$ を 7 で割った余りに等しいので, $x=y$ 。

$abcdef \times 10 \div 7 = \frac{abcdef \times 10}{7}$ を帯分数にしたときの分子は $abcdef \times 10$ を 7

で割った余りに等しいので, $x=z$ 。

$\frac{m}{7} \times 10 = 0.pqrstupqr \cdots \times 10 = p.qrstupqr \cdots = p + \frac{w}{7}$ となるので, $z=w$ 。

よって, $x=y=z=w$