受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ数列の乗法

以下のルールにしたがって長方形をつなげていきます。

① 最初に，１辺が１㎝の正方形とたて１㎝・横３㎝の長方形を図１のように辺が一直線になるようにぴったりと組み合わせます。このとき，正方形を１番目の図形，長方形を２番目の図形とします。
② 次に，１番目と２番目の図形をちょうど囲むことができる長方形を３番目の図形として，２番目の長方形と辺が一直線になるように，図２のようにぴったりと組み合わせます。
③ 続いて，２番目と３番目の図形をちょうど囲むことができる長方形を４番目の図形として，３番目の長方形と辺が一直線になるように，図３のようにぴったりと組み合わせます。
④ 以降も同じ操作をくり返します。

図１

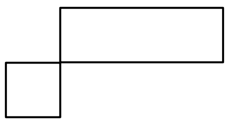


図２

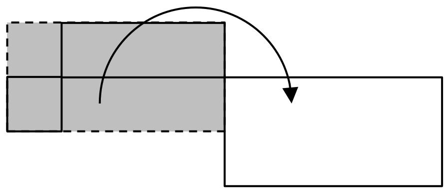
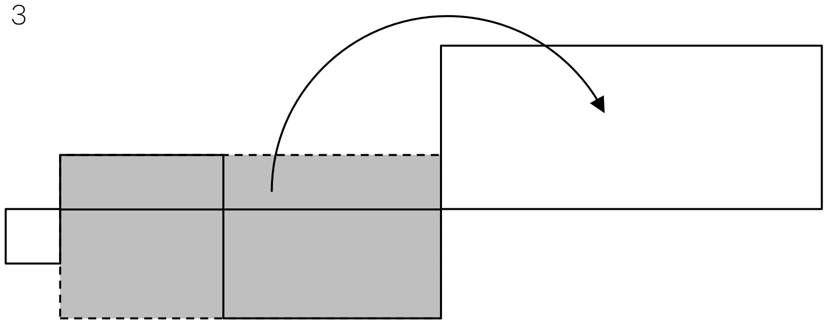


図３



（１）５番目の図形と６番目の図形の面積は，それぞれ何cm^2ですか。

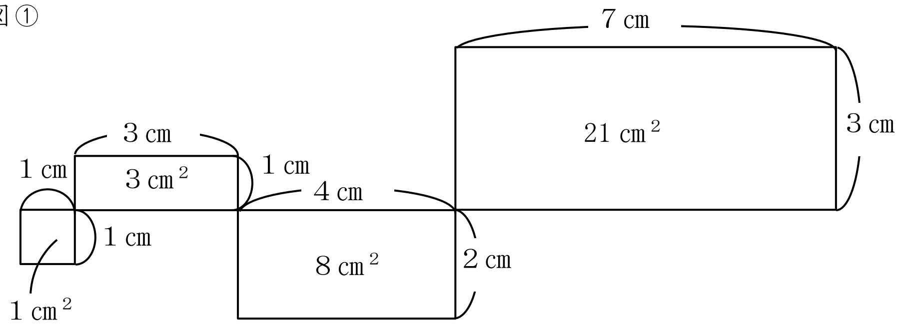
（２）２２番目の図形のたての長さは何㎝ですか。

最難関問題

フィボナッチ数列の乗法（１）５番目…５５㎝^{2}　６番目…１４４㎝^{2}　（２）１７７１１㎝

（１）４番目の図形までのたてと横の長さおよび面積は，図①のようになります。

図①



たての長さは１番目の図形から順に，１㎝，１㎝，２㎝，３㎝，…というフィボナッチ数列になり，横の長さも１番目の図形から順に，１㎝，３㎝，４㎝，７㎝，…というフィボナッチ数列になります。表にまとめると，次のようになります。

	１番目	２番目	３番目	４番目	５番目	６番目
たて（㎝）	1	1	2	3	5	8
横（㎝）	1	3	4	7	１１	１８
面積（㎝^{2}）	1	3	8	２１	５５	１４４

よって，５番目の図形の面積は５５㎝^{2}，６番目の図形の面積は１４４㎝^{2}です。

最難関問題

（２）（１）の表をもう少し続けていくと，以下のように面積が偶数番目の図形のたての長さと一致していることがわかります。

	１番目	２番目	３番目	４番目	５番目	６番目	７番目	８番目
たて（cm）	１	１	２	３	５	８	１３	２１
横（cm）	１	３	４	７	１１	１８	２９	４７
面積（cm^2）	１	３	８	２１	５５	１４４		

□番目の図形の面積は（□×２）番目の図形のたての長さに対応しているので，１１番目の図形の面積を求めます。

	１番目	２番目	３番目	４番目	５番目	６番目	７番目	８番目	９番目	１０番目	１１番目
たて（cm）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
横（cm）	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
面積（㎠）	1	3	8	21	55	144					

よって，８９×１９９＝１７７１１です。

なお，実際に２２番目のたての長さを求めると，次のようになります。

	１番目	２番目	３番目	４番目	５番目	６番目	７番目	８番目	９番目	１０番目	１１番目
たて（cm）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
横（cm）	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
面積（㎠）	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711
	１２番目	１３番目	１４番目	１５番目	１６番目	１７番目	１８番目	１９番目	２０番目	２１番目	２２番目
たて（cm）	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711
横（cm）	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349	15127	24476	39603
面積（㎠）											

このような，「フィボナッチ数列×フィボナッチ数列＝１つおきのフィボナッチ数列」が一般に成り立つかというと，そのようなことはありません。例えば１，１から始まるフィボナッチ数列と１，２から始まるフィボナッチ数列をかけても，今回のようなきれいな規則にはなりません。