最難関問題

三角形の周回と点の周回・正六角形

１辺が１cmの正三角形ＡＢＣがあり，点Ｐは図１のように頂点Ａを出発し，毎秒１cmの速さで正三角形ＡＢＣの辺上を時計回りに回り続けます。また，正三角形ＡＢＣは図２のように，毎秒１cmの速さで頂点Ａが正六角形を描くように右方向に点Ｐと同時に出発して時計回りに平行に移動し，もとの位置に戻ると止まります。

図１

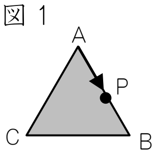
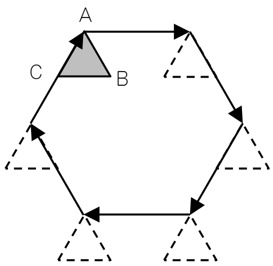


図２



（１）頂点Ａが１辺３cmの正六角形を描く場合の，頂点Ｐが通過したあとの線を，２枚目の用紙にかきなさい。

（２）頂点Ａが１辺５cmの正六角形を描く場合の，頂点Ｐが通過したあとの線を，２枚目の用紙にかきなさい。

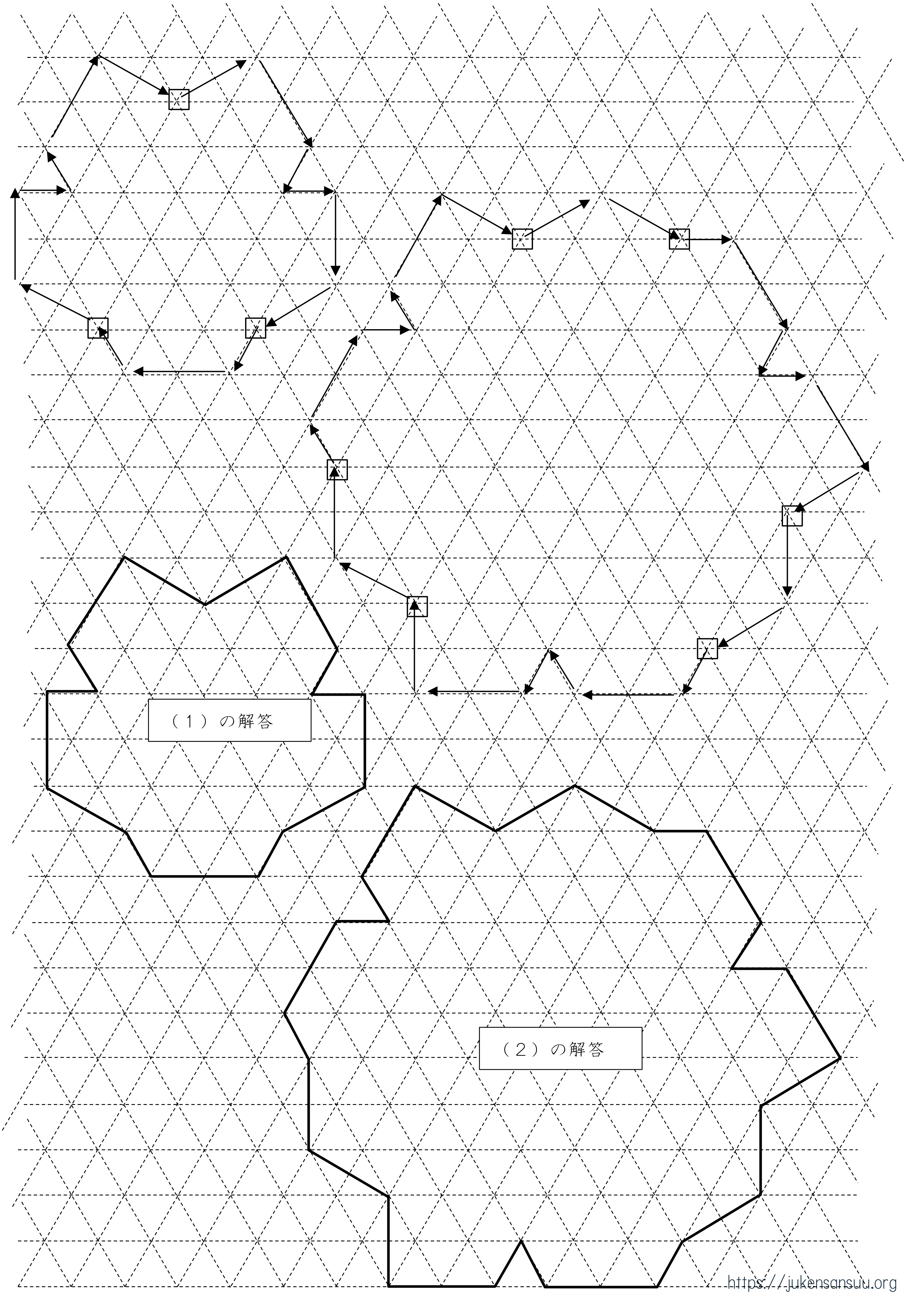
（３）頂点Ａが１辺２３cmの正三角形を描く場合の，頂点Ｐが通過したあとの線によって囲まれる部分の面積は，１辺が１cmの正三角形の面積の何倍ですか。必要であれば，２枚目の用紙を利用しなさい。

最難関問題

三角形の周回と点の周回・正六角形　（１）（２）解説参照　（３）３２２０倍

（１）（２）

頂点Ｐの１秒ごとの動きを→で表し，点Ｐがと正三角形の移動の関係から点Ｐの位置が１秒間変わらない場合を□で表すと，次のページの図のようになるので，解答は次のページの下部に示したものとなります。


（１）の解答
（２）の解答

最難関問題

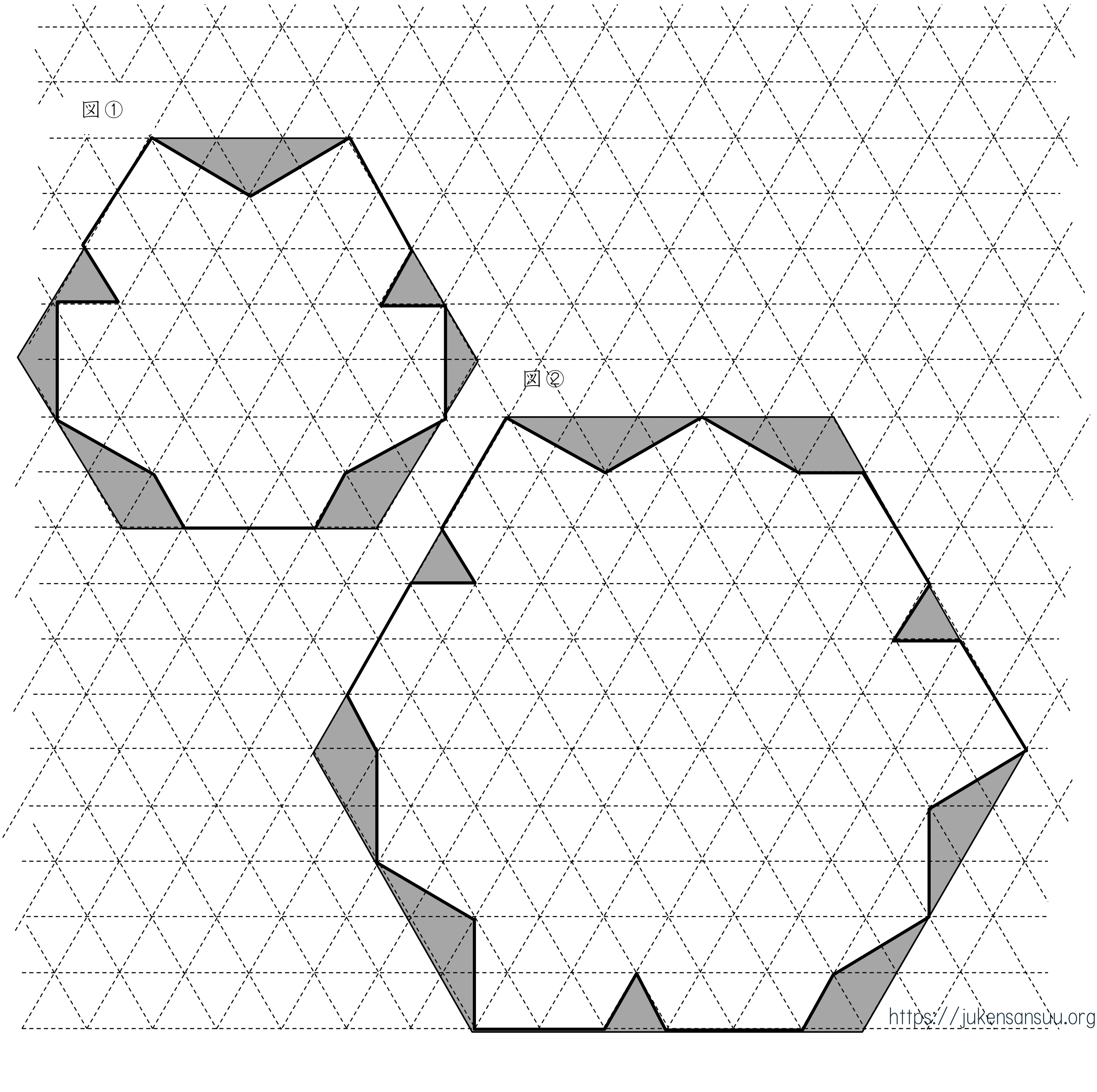
（３）（１）（２）で点Ｐが動いたあとによって囲まれた部分の面積を，まずは考えます。下の図①，②のように周りを取り囲む六角形との差で考えることができます。

図①の場合，周りを取り囲む六角形は１辺が３＋４＋３＝１０（㎝）の正三角形から１辺が３㎝の正三角形を取り除いた形なので，その面積は１辺１㎝の正三角形の，

１０×１０－３×３×３＝７３（倍）です。

かげをつけた部分の面積は１辺１㎝の正三角形の１３倍なので，７３－１３＝６０（倍）です。

図②では，周りを取り囲む六角形が１６×１６－５×５×３＝１８１（倍）で，かげをつけた部分の面積は２１倍なので，１８１－２１＝１６０（倍）です。



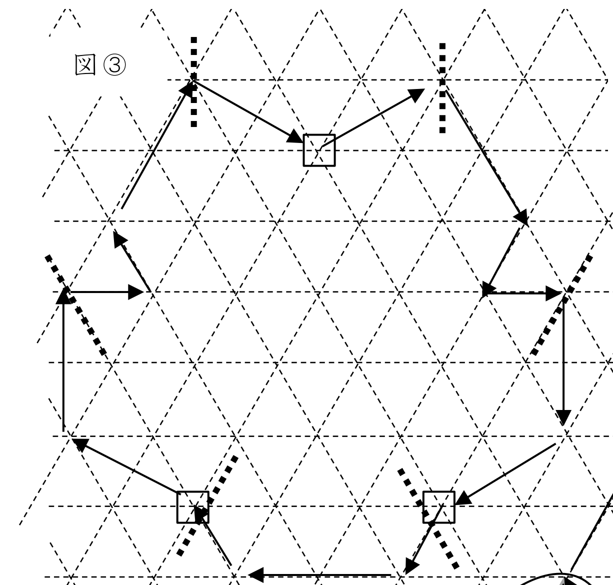
最難関問題

１辺２３cmの場合に作図をするのは（ほぼ）無理なので，辺の長さを増やした場合に，周りを取り囲む六角形との面積の差がどのように増えていくのかを考えます。点Ｐは，正六角形のそれぞれ辺に対して，図③の点線で区切った，３通りの動きをくりかえします。よって，正六角形の辺が３cm長くなるごとに，同じ仕方で点Ｐの動いたあとと，それによって生じる周りを取り囲む六角形との差の部分は増えていきます。図③のままではわかりにくいので，各辺における３つの動きの順番を入れかえながら差となる部分に影をつけると，図④のようになります。かげをつけた部分は１辺１cmの正三角形の１２倍の面積なので，正六角形の辺の長さが３cm増えるごとに，周りを取り囲む六角形との面積の差は１辺１cmの正三角形の１２倍ずつ増えていきます。

１辺２３cmの正六角形の場合，周りを取り囲む六角形の面積は，
７０×７０－２３×２３×３＝３３１３（倍）です。

また，２３＝５＋３×６なので，かげをつけた部分の面積は
２１＋１２×６＝９３（倍）です。よって，
３３１３－９３＝３２２０（倍）です。

図③



図④