

最難関問題

輪と正二十角形

図1のように、正二十角形の頂点の位置に杭を打ち、20本の杭の外側に半径が1 cmの円の形をした輪を置きます。正二十角形の1辺の長さは、図2のように頂角が9度で頂角をはさむ2辺の長さが1 cmである二等辺三角形の底辺の長さと等しくなっています。杭の大きさや輪の太さは考えません。円周率は3.14とします。

図1

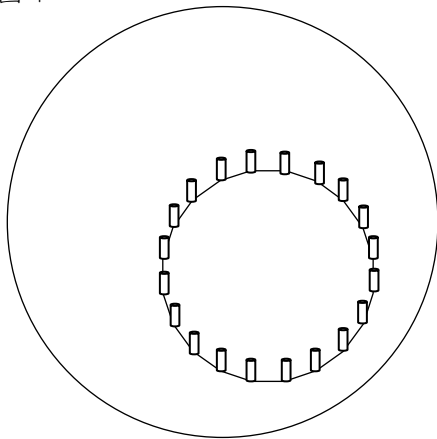
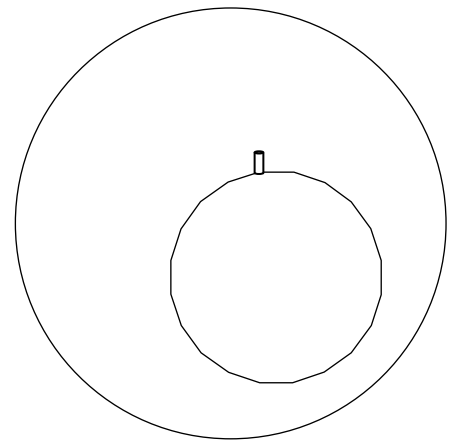
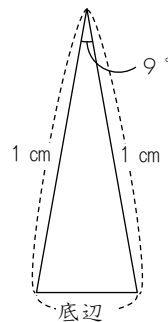


図2



(1) 図1において輪を動かすとき、輪が通過できる部分の内周と外周の長さの和を求めなさい。

(2) 図1において輪を動かすとき、輪が通過できる部分の面積を求めなさい。

最難関問題

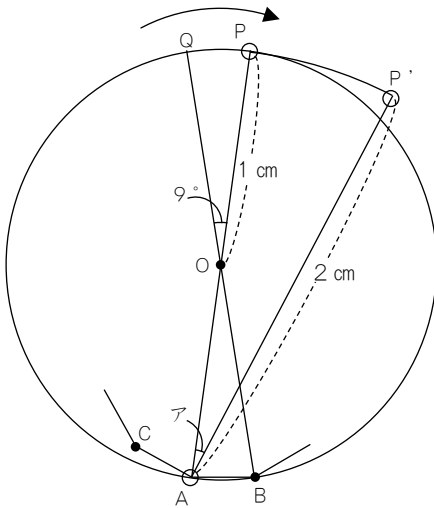
輪と正二十形 (1) 12.56 cm (2) 6.28 cm²

(1) 輪=円の中心をOとして、図①のように、正二十角形のとなりあう2つの頂点A, Bが円に接している状態を考えます。このときの、半径1cmで中心角9度のおうぎ形OABの弧AB 20個分が、輪が通過できる範囲の内周にあたります。よって、内周の長さは、

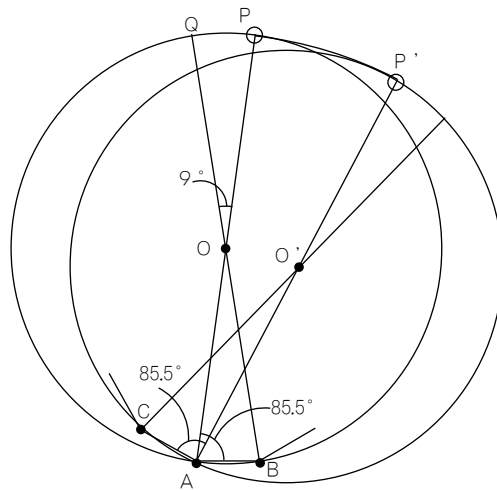
$$1 \times 2 \times 3.14 \times \frac{9}{360} \times 20 = 3.14 \text{ (cm) です。}$$

また、APとBQがどちらも円の直径となるように円周上の2点P, Qをとります。頂点Aを中心に円が時計回りに、Aの左どなりの頂点Cと接するまで回転したときの点Pの位置をP' とすると、点Pはもっとも外側を通るので、半径2cmのおうぎ形の弧PP' は外周の一部となります。その中心角アの大きさは、図②で考えます。二等辺三角形の底角OABとO'ACの大きさは、どちらも $(180 - 9) \div 2 = 85.5$ (度) です。また、正二十角形の1つの内角の大きさは $180 - 360 \div 20 = 162$ (度) ですから、角アの大きさは、 $85.5 \times 2 - 162 = 9$ (度) です。

図①



図②



輪は図①, ②のような回転を繰り返すことでもっとも外側を通過するので、外周は図①の弧QPと弧PP' 20個を組み合わせた形になります。よってその長さは

$$1 \times 2 \times 3.14 \times \frac{9}{360} \times 20 + 2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{9}{360} \times 20 = 9.42 \text{ (cm) です。}$$

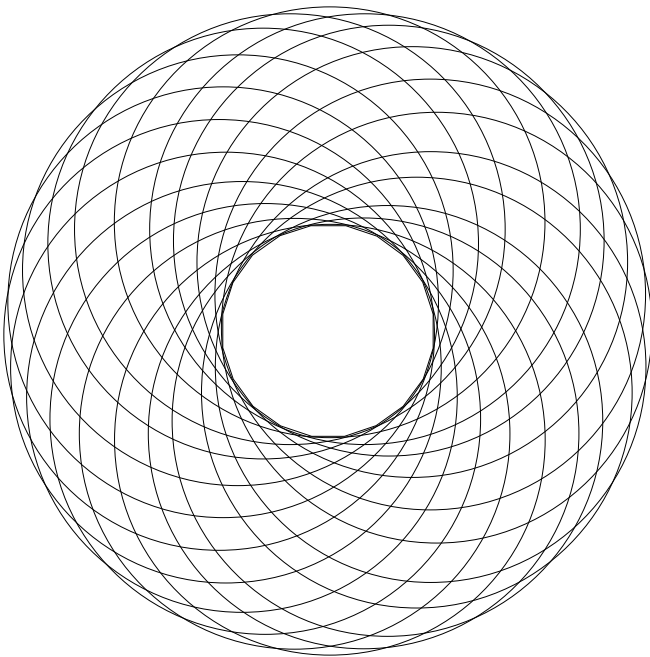
以上より、内周と外周の長さの和は、 $3.14 + 9.42 = 12.56$ (cm) です。

最難関問題

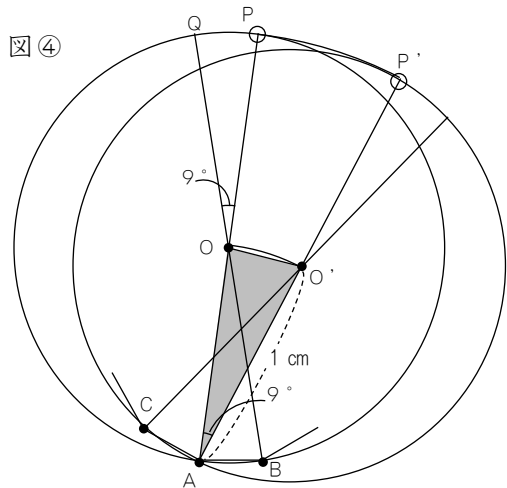
(2) 正二十角形のとなりあう2つの頂点が接した状態にある20個の輪を重ねると、図③のようになります。もちろん、このような作図は行えませんし、図③も目分量で描いた不正確な図です。この図の周りに図①の弧PP'を20個描き加えた図形全体から、中央の輪が通過できない部分＝正二十角形と半径1cmで中心角9度の弧20個を組み合わせた図形を引くと、輪が通過する部分になります。とはいえ、全体の面積も中央の通過できない部分の面積も求められそうにありません。

ここで、改めて図②の円の中心OとO'に注目します。図④において、三角形AOO'は頂角が9度で頂角をはさむ2辺の長さが1cmの二等辺三角形ですから、底辺OO'の長さは杭を打った正二十角形の1辺の長さと同じになります。よって、このようにして正二十角形のとなりあう2つの頂点が接した状態にある20個の円の中心を直線で結ぶと、杭を打った正二十角形と合同な正二十角形になります。

図③

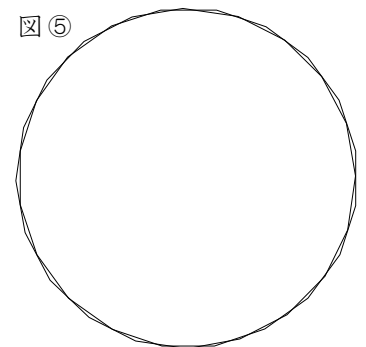


図④



ただし、2つの正二十角形は、図⑤のようにすこしずれた位置で重なります。

図⑤



最難関問題

よって、外周に囲まれた図形全体から、杭を打った正二十角形に半径 1 cm で中心角 9 度の弧 20 個を組みあわせた図形を引く代わりに、円の中心 O を結んでできる正二十角形に半径 1 cm で中心角 9 度の弧 20 個を組みあわせた図形を引いても、求める値は等しくなります。よって、図⑥の斜線部分とあみ目部分を 20 個組み合わせた図形の面積を求めればよいことになります。

斜線部分 1 個とあみ目部分 1 個を組み合わせると、半径が 2 cm で中心角 9 度のおうぎ形になるので、求める面積は、 $2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{9}{360} \times 20 = 6.28 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

図⑥

