

おまけの逆算問題

あるお店では、決まった本数のジュースの空きびんと決まった本数のジュースを交換してくれます。例えば、1回に空きびん7本をジュース2本と交換する場合、ジュースを20本買って飲むと空きびんが20本できるので、2回の交換で空きびん14本のかわりに新しいジュース4本をもらい、その4本を飲むと空きびんがあわせて $20 - 14 + 4 = 10$ （本）になるので、1回の交換でさらにもう2本のジュースをもらって、最大で26本のジュースを飲むことができます。

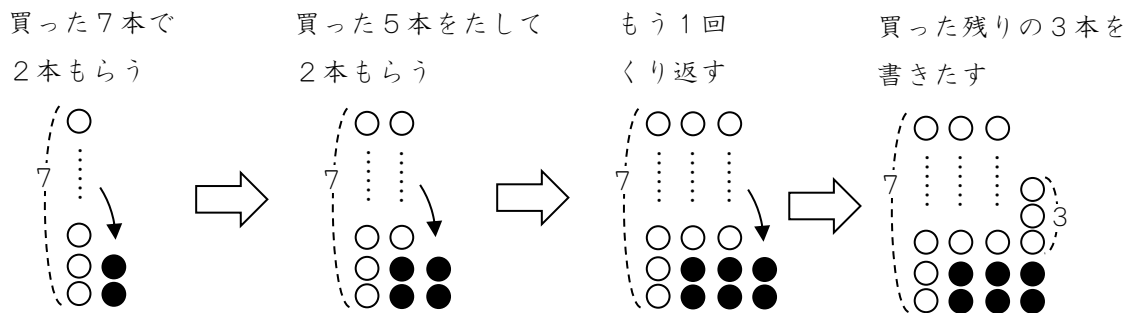
(1) 40本のジュースを買ったところ、最大で64本ジュースを飲むことができました。1回の交換でもらえるジュースの本数として考えられるものを、すべて答えなさい。

(2) ジュースを何本か買ったところ、最大でそれより24本多くジュースを飲むことができました。このとき、1回の交換でもらえるジュースの本数として考えられるものは、全部で4通りありました。ジュースを何本買いましたか。考えられる本数のうち、最も少ないものと最も多いものを答えなさい。

おまけの逆算問題 (1) 2本, 4本, 6本, 8本, 12本, 24本 (2) 14本, 33本

(1) 1回の交換でもらえるジュースの本数は24の約数にあたるので, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24のいずれかです。よって, それぞれの場合に条件を満たすかどうかを調べます。図①は, 問題文中の例を, よくあるおまけの問題の図で解いたもので○は買ったジュース, ●は交換して手に入れたジュースを表します。以下ではこの図を利用します。

図①



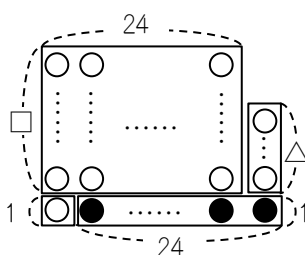
1回の交換で1本

図②のように分けて考えると, $24 \times \square + \triangle = 40 - 1 = 39$ ですから, $(\square, \triangle) = (1, 15)$ となります。ところが, \triangle にあてはまる数が \square にあてはまる数以上の場合, さらに交換できてしまうので, 「最大で」という条件に反します。また, $\square = 0$ のときはもらったジュースの空きびん1本を持っていくと新しいジュースを1本もらえるので, ジュースを無限に飲むことができてしまいます。よって, 成り立ちません。

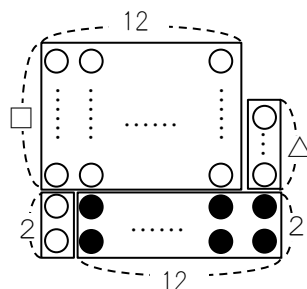
1回の交換で2本

図③において, $12 \times \square + \triangle = 40 - 2 = 38$ ですから, $(\square, \triangle) = (3, 2)$ の場合に条件を満たします。

図②



図③



1回の交換で3本

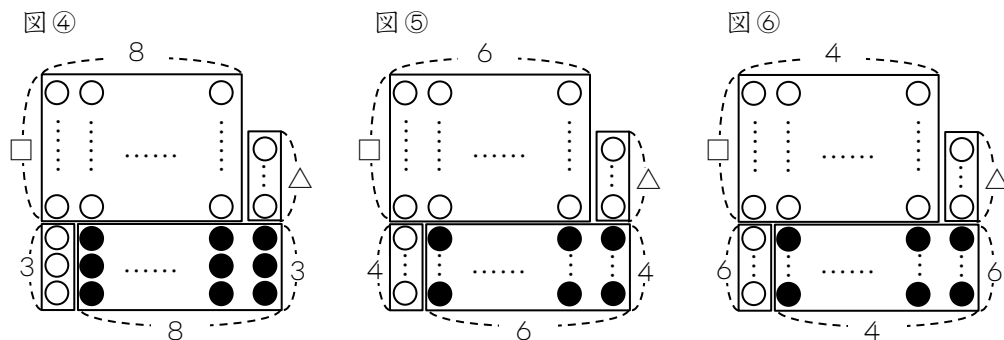
図④において、 $8 \times \square + \triangle = 40 - 3 = 37$ ですから、 $(\square, \triangle) = (4, 5)$ 等となってしまう、条件を満たしません。

1回の交換で4本

図⑤において、 $6 \times \square + \triangle = 40 - 4 = 36$ ですから、 $(\square, \triangle) = (6, 0)$ の場合に条件を満たします。

1回の交換で6本

図⑥において、 $4 \times \square + \triangle = 40 - 6 = 34$ ですから、 $(\square, \triangle) = (8, 2), (7, 6)$ の場合に条件を満たします。



1回の交換で8本

図⑦において、 $3 \times \square + \triangle = 40 - 8 = 32$ ですから、 $(\square, \triangle) = (10, 2), (9, 5)$ の場合に条件を満たします。

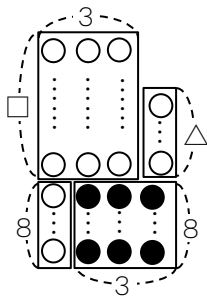
1回の交換で12本

図⑧において、 $2 \times \square + \triangle = 40 - 12 = 28$ ですから、 $(\square, \triangle) = (14, 0), (13, 2), (12, 4), (11, 6), (10, 8)$ の場合に条件を満たします。

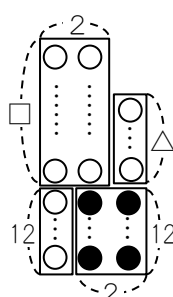
1回の交換で24本

$1 \times \square + \triangle = 40 - 24 = 16$ ですから、 $(\square, \triangle) = (16, 0), (15, 1) \dots, (9, 7)$ の場合に条件を満たします。

図⑦



図⑧

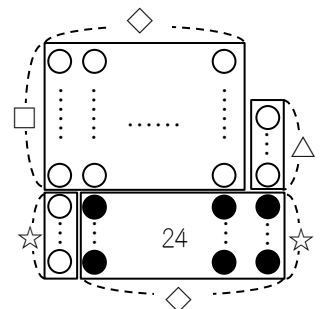


問題で聞かれているのは、1回の交換でもらえる本数ですから、2本、4本、6本、8本、12本、24本の6通りです。

(2) (1) の考えを踏まえると、買ったジュースともらったジュースの関係は図⑨のようになり、☆が1回の交換でもらえるジュースの本数を表しています。

ここで、1回の交換で1本もらえる場合を考えると、 $\star = 1$ 、 $\diamond = 24 \div 1 = 24$ となるので、買ったジュースの本数は、 $24 \times \square + \triangle + 1$ で、 \triangle が \square より小さい整数であるという条件を満たしていればよいので、 $(\square, \triangle) = (1, 0)$ のときに25、 $(2, 0)$ のときに49、 $(2, 1)$ のときに50、…というようにとびとびの値を取ります。

図⑨



$24 \times \square + \triangle + 1$ の「とびとびの」値の取り方は、次のような規則を持ちます。

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{25}, & \underbrace{49 \sim 50}, & \underbrace{73 \sim 75}, & \underbrace{97 \sim 100}, & \cdots \\ \square=1 & \square=2 & \square=3 & \square=4 & \cdots \end{array}$$

そして、 $\square=24$ のときに、 $24 \times 24 + 0 + 1 \sim 24 \times 24 + 23 + 1$ となって、次の数は

$24 \times 25 + 0 + 1$ ですから、 $24 \times 24 + 0 + 1 = 577$ 以降は隙間^{すきま}が無くなります。このようにして、1回の交換でもらえるジュースの本数に対する買ったジュースの本数は、以下のようになります。

☆=1	$24 \times \square + \triangle + 1 \cdots 25, 49 \sim 50, 73 \sim 75, 97 \sim 100, \cdots$	577以上の整数全て
☆=2	$12 \times \square + \triangle + 2 \cdots 14, 26 \sim 27, 38 \sim 40, 50 \sim 53, \cdots$	146以上の整数全て
☆=3	$8 \times \square + \triangle + 3 \cdots 11, 19 \sim 20, 27 \sim 29, 35 \sim 38, \cdots$	67以上の整数全て
☆=4	$6 \times \square + \triangle + 4 \cdots 10, 16 \sim 17, 22 \sim 24, 28 \sim 31, \cdots$	40以上の整数全て
☆=6	$4 \times \square + \triangle + 6 \cdots 10, 14 \sim 15, 18 \sim 20, 22$	22以上の整数全て
☆=8	$3 \times \square + \triangle + 8 \cdots 11, 14 \sim 15, 17$	17以上の整数全て
☆=12	$2 \times \square + \triangle + 12 \cdots 14$	14以上の整数全て
☆=24	$1 \times \square + \triangle + 24 \cdots 25$	25以上の整数すべて

あとは、以上8つの数列のうち、ちょうど4つの数列に現れる数を考えればよいわけです。最も小さいものは、調べていって14です。最も大きいものについては、「〇〇以上の整数すべて」の範囲を考えると、40以上の整数は確実に5つ以上の数列に現れるので、39以下の整数を考えます。25以上39以下の整数は、☆=6, 8, 12, 24の4つの数列には確実に現れるので、それ以外の数列に現れないものを探します。☆=3, 4の場合、39以下の範囲が上には書いていませんが、次のようになります。

☆=3	$8 \times \square + \triangle + 3 \cdots 11, 19 \sim 20, 27 \sim 29, 35 \sim 38, 43 \sim 47, \cdots$
☆=4	$6 \times \square + \triangle + 4 \cdots 10, 16 \sim 17, 22 \sim 24, 28 \sim 31, 34 \sim 38, \cdots$

39は☆=2の数列に現れ、34～38は少なくとも☆=4の数列に現れます。33はそのようなことはないで、最も大きいものは33です。

以上より、買ったジュースは最も少なくても14本、最も多くて33本です。