

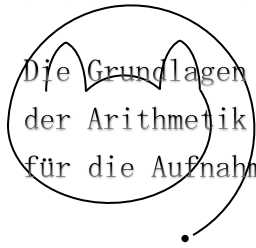
最難関問題

2023の問題・積の下2桁

$2 \times 32 \times 82$ のように、一の位が等しい3個の整数の積の下2桁^{けた}を考えます。

$2 \times 32 \times 82 = 5248$ では、下2桁は48です。

- (1) $11 \times 11 \times 11$, $21 \times 21 \times 21$, $31 \times 31 \times 31$, $41 \times 41 \times 41$ の下2桁をそれぞれ答えなさい。
- (2) 一の位が3である3個の2桁の整数 $a3$, $b3$, $c3$ の積の十の位はどのような数になりますか。簡単に説明しなさい。
- (3) 積の下2桁が23になるような、一の位が等しい100未満の3個の素数の組み合わせをすべて答えなさい。



最難関問題

2023の問題・積の下2桁

(1) 31, 61, 91, 21

(2) (解答例) $9 \times (a + b + c) + 2$ の一の位

(3) (7, 17, 17), (7, 37, 97), (7, 67, 67), (37, 37, 67),
(47, 47, 47), (47, 97, 97)

(1) 下2桁のみを残す筆算によって、次のように計算します。

$\begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ 1 \\ \hline 21 \\ \times 11 \\ \hline 21 \\ 1 \\ \hline 31 \end{array}$	$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 2 \\ \hline 41 \\ \times 21 \\ \hline 41 \\ 2 \\ \hline 61 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 3 \\ \hline 61 \\ \times 31 \\ \hline 61 \\ 3 \\ \hline 91 \end{array}$	$\begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 41 \\ 4 \\ \hline 81 \\ \times 41 \\ \hline 81 \\ 4 \\ \hline 21 \end{array}$
---	---	---	---

よって、順に31, 61, 91, 21です。

(2) 下2桁のみを残す筆算は次のようになります。

$$\begin{array}{r} a3 \\ \times b3 \\ \hline 3 \times a9 \\ 3 \times b \\ \hline 3 \times (a + b)9 \\ \times c23 \\ \hline 9 \times (a + b) + 27 \\ 9 \times c \\ \hline 9 \times (a + b + c) + 27 \end{array}$$

よって、 $9 \times (a + b + c) + 2$ の一の位です。

最難関問題

(3) 1桁の同じ整数をかけてできる立方数の一の位は、次のようにすべて異なります。

$$1 \times 1 \times 1 = \underline{1}, \quad 2 \times 2 \times 2 = \underline{8}, \quad 3 \times 3 \times 3 = \underline{27}, \quad 4 \times 4 \times 4 = \underline{64}, \quad 5 \times 5 \times 5 = \underline{125},$$
$$6 \times 6 \times 6 = \underline{216}, \quad 7 \times 7 \times 7 = \underline{343}, \quad 8 \times 8 \times 8 = \underline{512}, \quad 9 \times 9 \times 9 = \underline{729}$$

よって、3個の素数の一の位は7であり、一の位が7である100未満の素数は、

7, 17, 37, 47, 67, 97です。(2)より、 $a7$, $b7$, $c7$ の十の位は、343の十の位が4であることから、 $49 \times (a + b + c) + 4$ の一の位、つまり $9 \times (a + b + c) + 4$ の一の位です。

$9 \times (a + b + c) + 4$ の一の位が2ということから、 $9 \times (a + b + c)$ の一の位は8です。9にかけて一の位が8になる整数は、一の位が2の数のみなので、 $a + b + c$ の一の位は2です。

a , b , c にあてはまる可能性のある数は0, 1, 3, 4, 6, 9ですから、条件を満たす組み合わせを探すと次の6組です。

$$(0, 1, 1), (0, 3, 9), (0, 6, 6), (3, 3, 6), (4, 4, 4), (4, 9, 9)$$

よって、答えは次の6組です。

$$(7, 17, 17), (7, 37, 97), (7, 67, 67), (37, 37, 67), (47, 47, 47),$$
$$(47, 97, 97)$$

なお、 $7 \times 17 \times 17$ を計算すると、2023になります。