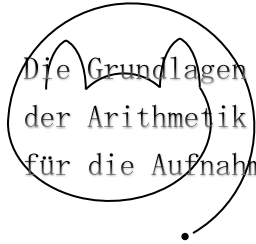


連続する奇数・偶数への分解

整数を，2個以上の連続する奇数の和か，偶数の和に分解することを考えます。例えば12の場合， $2 + 4 + 6$ と $5 + 7$ という2通りの分解が可能です。

- (1) 15, 30を連続する奇数か偶数の和に分解する方法をすべて書きなさい。
- (2) 900を連続する奇数か偶数の和に分解する方法は何通りありますか。
- (3) 50以下の整数のうち，連続する奇数か偶数の和に分解することができない整数は何個ありますか。
- (4) 連続する奇数か偶数の和に分解する方法が7通りある整数を，小さい順に3個答えなさい。

受験算数の基礎



最難関問題

連続する奇数・偶数への分解

(1) $15 = 3 + 5 + 7$, $30 = 14 + 16$, $8 + 10 + 12$, $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

(2) 13通り (3) 16個 (4) 120, 144, 168

(1) $15 = 3 + 5 + 7$, $30 = 14 + 16 = 8 + 10 + 12 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ です。

(2) 900について(1)と同じように調べ上げるのは無理があるので、仕組みを考えます。

奇数個の偶数に分解できる場合

ある偶数②について、次のようになります。

$$\dots \square \underbrace{\quad \textcircled{2} \quad}_{-2} \underbrace{\quad}_{+2} \square \dots$$

このとき、もとの数は(②×奇数)、つまりは偶数×奇数となります。例えば、

$30 = 10 \times 3$ から、 $30 = 8 + 10 + 12$ となり、

$30 = 6 \times 5$ から $30 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ となります。どちらの場合も、偶数>奇数です。

偶数個の偶数に分解できる場合

ある奇数②+1について、次のようになります。

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} + 1 \\ \dots \underbrace{\textcircled{2}}_{-2} \quad \vdots \quad \textcircled{2} + 2 \quad \underbrace{\quad}_{+2} \dots \end{array}$$

このとき、もとの数は(②+1)×偶数、つまりは奇数×偶数となります。例えば、 $30 = 15 \times 2$ から、 $30 = 14 + 16$ となります。奇数と偶数の大小関係は、奇数>偶数となります。

奇数個の奇数に分解できる場合

ある奇数②+1について、次のようになります。

$$\dots \square \underbrace{\quad \textcircled{2} + 1 \quad}_{-2} \underbrace{\quad}_{+2} \square \dots$$

このとき、もとの数は(②+1)×奇数で、②+1は個数を示す奇数以上の数となります。例えば、

$15 = 5 \times 3$ から、 $15 = 3 + 5 + 7$ となり、 $9 = 3 \times 3$ から、 $9 = 1 + 3 + 5$ となります。

偶数個の奇数に分解できる場合

ある偶数②について、次のようになります。

$$\cdots \underbrace{② - 1}_{-2} \quad \overset{②}{\vdots} \quad \underbrace{② + 1}_{+2} \quad \cdots$$

このとき、もとの数は(②×偶数)で、②は個数を示す偶数以上の数となります。例えば、 $8 = 4 \times 2$ から、 $8 = 3 + 5$ となり、 $16 = 4 \times 4$ から $16 = 1 + 3 + 5 + 7$ となります。

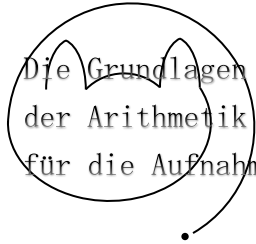
以上より、整数を2個以上の連続する奇数か偶数の和に分解する方法は、整数を1を除く2つの数の積に分解する方法と1対1で対応することがわかります。

900の場合、 $900 = 2 \times 450 = 3 \times 300 = \cdots$ というふうに900を2数の積に分解する方法は、900の約数の個数から求めることができます。900 = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 5より、900の約数の個数は(2 + 1) × (2 + 1) × (2 + 1) = 27(個)あります。奇数個であるのは900が30 × 30の平方数であるからで、900を2数の積に分解する方法は、

$(27 + 1) \div 2 = 14$ (通り)あります。これらのうちで、 $900 = 1 \times 900$ は連続する2個以上の奇数か偶数に分解する方法につながらないので、のぞきます。よって、900を連続する2個以上の奇数か偶数に分解する方法は、 $14 - 1 = 13$ (通り)あります。

(3) (2)より、1を含まない2数の積によってあらわすことができる数は連続する奇数か偶数の和に分解できます。この条件を満たさないのは、1と素数です。よって、

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
の16個です。



(4) 約数の個数が15個ある整数は平方数で、2数の積に分解する方法は $(15 + 1) \div 2 = 8$ (通り) あります。1を含む組を除くと $8 - 1 = 7$ (通り) となるので、連続する奇数か偶数の和に分解する方法も7通りあります。

また、約数の個数が16個ある整数は、2数の積に分解する方法が $16 \div 2 = 8$ (通り) あるので、連続する奇数か偶数の和に分解する方法は $8 - 1 = 7$ (通り) あります。

よって、約数の個数が15個か16個である整数のうちで、小さいほうから3個を求めればよいこととなります。

約数の個数が15個の整数は、素因数分解をすると

$$\underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{14 \text{ 個}} \quad \text{か} \quad \underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{4 \text{ 個}} \times \underbrace{\triangle \times \cdots \times \triangle}_{2 \text{ 個}}$$

になります。小さい順に、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$ 、 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 324$ 、 \cdots となります。

約数の個数が16個の整数は、素因数分解をすると

$$\underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{15 \text{ 個}} \quad \text{か} \quad \underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{7 \text{ 個}} \times \triangle \quad \text{か} \quad \underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{3 \text{ 個}} \times \underbrace{\triangle \times \cdots \times \triangle}_{3 \text{ 個}} \quad \text{か}$$

$$\underbrace{\circ \times \cdots \times \circ}_{3 \text{ 個}} \times \triangle \times \square \quad \text{か} \quad \circ \times \triangle \times \square \times \star$$

になります。小さい順に、 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ 、 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$ 、 $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ 、 \cdots となります。

以上より、連続する奇数か偶数の和に分解する方法が7通りある整数は、小さい順に120、144、168です。