連続する奇数・偶数への分解

整数を，２個以上の連続する奇数の和か，偶数の和に分解することを考えます。例えば１２の場合，２＋４＋６と５＋７という２通りの分解が可能です。

（１）１５，３０を連続する奇数か偶数の和に分解する方法をすべて書きなさい。
（２）９００を連続する奇数か偶数の和に分解する方法は何通りありますか。
（３）５０以下の整数のうち，連続する奇数か偶数の和に分解することができない整数は何個ありますか。
（４）連続する奇数か偶数の和に分解する方法が７通りある整数を，小さい順に３個答えなさい。

連続する奇数・偶数への分解

（１）１５＝３＋５＋７，３０＝１４＋１６，８＋１０＋１２，２＋４＋６＋８＋１０

（２）１３通り　（３）１６個　（４）１２０，１４４，１６８

（１）１５＝３＋５＋７，３０＝１４＋１６＝８＋１０＋１２＝２＋４＋６＋８＋１０です。

（２）９００について（１）と同じように調べ上げるのは無理があるので，仕組みを考えます。

奇数個の偶数に分解できる場合

ある偶数②について，次のようになります。

…　□　②　□　…

－２　＋２

このとき，もとの数は（②×奇数），つまりは偶数×奇数となります。例えば，

３０＝１０×３から，３０＝８＋１０＋１２となり，

３０＝６×５から３０＝２＋４＋６＋８＋１０となります。どちらの場合も，偶数＞奇数です。

偶数個の偶数に分解できる場合

ある奇数②＋１について，次のようになります。

②＋１

…　②　②＋２　…

－２　＋２

このとき，もとの数は（②＋１）×偶数，つまりは奇数×偶数となります。例えば，３０＝１５×２から，３０＝１４＋１６となります。奇数と偶数の大小関係は，奇数＞偶数となります。

奇数個の奇数に分解できる場合

ある奇数②＋１について，次のようになります。

…　□　②＋１　□　…

－２　＋２

このとき，もとの数は（②＋１）×奇数で，②＋１は個数を示す奇数以上の数となります。例えば，

１５＝５×３から，１５＝３＋５＋７となり，９＝３×３から，９＝１＋３＋５となります。

偶数個の奇数に分解できる場合

　ある偶数②について，次のようになります。

②

… ②－１ ┊ ②＋１ …

－２　　　　＋２

このとき，もとの数は（②×偶数）で，②は個数を示す偶数以上の数となります。例えば，８＝４×２から，８＝３＋５となり，１６＝４×４から１６＝１＋３＋５＋７となります。

　以上より，整数を２個以上の連続する奇数か偶数の和に分解する方法は，整数を１を除く２つの数の積に分解する方法と１対１で対応することがわかります。

　９００の場合，９００＝２×４５０＝３×３００＝…というふうに９００を２数の積に分解する方法は，９００の約数の個数から求めることができます。９００＝２×２×３×３×５×５より，９００の約数の個数は（２＋１）×（２＋１）×（２＋１）＝２７（個）あります。奇数個であるのは９００が３０×３０の平方数であるからで，９００を２数の積に分解する方法は，
（２７＋１）÷２＝１４（通り）あります。これらのうちで，９００＝１×９００は連続する２個以上の奇数か偶数に分解する方法につながらないので，のぞきます。よって，９００を連続する２個以上の奇数か偶数に分解する方法は，１４－１＝１３（通り）あります。

（３）（２）より，１を含まない２数の積によってあらわすことができる数は連続する奇数か偶数の和に分解できます。この条件を満たさないのは，１と素数です。よって，
１，２，３，５，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９，３１，３７，４１，４３，４７
の１６個です。

最難関問題

（４）約数の個数が１５個ある整数は平方数で，２数の積に分解する方法は（１５＋１）÷２＝８（通り）あります。１を含む組を除くと８－１＝７（通り）となるので，連続する奇数か偶数の和に分解する方法も７通りあります。

また，約数の個数が１６個ある整数は，２数の積に分解する方法が１６÷２＝８（通り）あるので，連続する奇数か偶数の和に分解する方法は８－１＝７（通り）あります。

よって，約数の個数が１５個か１６個である整数のうちで，小さいほうから３個を求めればよいことになります。

約数の個数が１５個の整数は，素因数分解をすると

$$\underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{14個} \quad か \quad \underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{4個}\times\underbrace{\triangle\times\cdots\times\triangle}_{2個}$$

になります。小さい順に，２×２×２×２×３×３＝１４４，３×３×３×３×２×２＝３２４，…となります。

約数の個数が１６個の整数は，素因数分解をすると

$$\underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{15個} \quad か \quad \underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{7個}\times\triangle \quad か \quad \underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{3個}\times\underbrace{\triangle\times\cdots\times\triangle}_{3個} \quad か$$

$$\underbrace{\bigcirc\times\cdots\times\bigcirc}_{3個}\times\triangle\times\square \quad か \quad \bigcirc\times\triangle\times\square\times☆$$

になります。小さい順に，２×２×２×３×５＝１２０，２×２×２×３×７＝１６８，２×３×５×７＝２１０，…となります。

以上より，連続する奇数か偶数の和に分解する方法が７通りある整数は，小さい順に１２０，１４４，１６８です。