受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

分数・級数

（１）３を次々とかけあわせていくと，

３，９，２７，８１，２４３，７２９，２１８７，６５６１，１９６８３，５９０４９，
１７７１４７，５３１４４１，…

となります。このことを参考に，次の計算をしなさい。

① $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}$

② $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}+\dfrac{1}{729}$

③ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}+\dfrac{1}{729}+\dfrac{1}{2187}+\dfrac{1}{6561}+\dfrac{1}{19683}+\dfrac{1}{59049}$
$+\dfrac{1}{177147}+\dfrac{1}{531441}$

（２）整数ａを次々とかけあわせていくことでできる数ａ，ａ×ａ，ａ×ａ×ａ，…を分母とする分数

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a\times a}+\dfrac{1}{a\times a\times a}+\cdots+\dfrac{1}{\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k\text{個}}}$ を計算した答えを上から７けたの概数で求めた

ところ，０.３３３３３３３になりました。ａおよびｋにあてはまる，最も小さい整数を求めなさい。
ただし，ｋは２以上の整数とします。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

分数・級数

（１）①$\dfrac{121}{243}$　②$\dfrac{364}{729}$　③$\dfrac{265720}{531441}$

（２）ａ＝４，ｋ＝１１

（１）

①　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}=\dfrac{81+27+9+3+1}{243}=\dfrac{121}{243}$

②　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}+\dfrac{1}{729}=\dfrac{243+81+27+9+3+1}{729}=\dfrac{364}{729}$

③　①，②の答えは，ほぼ$\dfrac{1}{2}$になっています。その仕組みを考えます。②について，

Ｘ＝１＋３＋９＋２７＋８１＋２４３とすると，

$$\begin{aligned} X &= 1+3+9+27+81+243 \\ X\times 3 &= \quad\ 3+9+27+81+243+729 \\ \hline X\times 2 &= 729-1 \\ X &= (729-1)\div 2 \end{aligned}$$

，となるので，

$\dfrac{243+81+27+9+3+1}{729}=\dfrac{(729-1)\div 2}{729}=\dfrac{729-1}{729\times 2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{729\times 2}$です。

同様にして，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{531441\times 2}=\dfrac{531441-1}{531441\times 2}=\dfrac{265720}{531441}$となります。

最難関問題

（２）
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a\times a}+\frac{1}{a\times a\times a}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}}$$
$$=\frac{\overbrace{a\times\ldots\times a}^{k-1\text{個}}+\ldots+a\times a+a+1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}}$$

ここで，$X=1+a+a\times a+\cdots+\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k-1\text{個}}$ とすると，

$$X=1+a+a\times a+\cdots+\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k-1\text{個}}$$
$$X\times a=\quad a+a\times a+\cdots+\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k-1\text{個}}+\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k\text{個}}$$

$$X\times(a-1)=\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k\text{個}}-1$$
$$X=(\underbrace{a\times\cdots\times a}_{k\text{個}}-1)\div(a-1)$$

となるので，

$$\frac{\overbrace{a\times\ldots\times a}^{k-1\text{個}}+\ldots+a\times a+a+1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}}=\frac{(\overbrace{a\times\ldots\times a}^{k\text{個}}-1)\div(a-1)}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}}$$
$$=\frac{\overbrace{a\times\ldots\times a}^{k\text{個}}-1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}\times(a-1)}=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}\times(a-1)}$$

となって，$\frac{1}{a}+\frac{1}{a\times a}+\frac{1}{a\times a\times a}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{a\times\ldots\times a}_{k\text{個}}}$ を計算した答えはほぼ$\frac{1}{a-1}$になります。

０.３３３３３３３はほぼ$\frac{1}{3}$なので，$a-1=3$，$a=4$です。

最難関問題

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4\times\cdots\times4\times3}$は０.３３３３３３２５以上なので，

$\frac{1}{4\times\cdots\times4\times3}$は$\frac{1}{3}$－０.３３３３３３２５＝０.００００００００８３３３…以下，

$\frac{1}{4\times\cdots\times4}$は０.００００００００８３３３…×３＝０.０００００００２５＝$\frac{1}{4000000}$以下です。

４を何個かかけ合わせて４０００００００以上になればよいので，さがしていくと，

４，１６，６４，２５６，１０２４，４０９６，１６３８４，６５５３６，２６２１４４，

１０４８５７６，４１９４３０４で４０００００００以上になるので，ｋ＝１１です。