

最難関問題

分数・級数

(1) 3を次々とかけあわせていくと、

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049,
177147, 531441, …

となります。このことを参考に、次の計算をなさい。

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$$

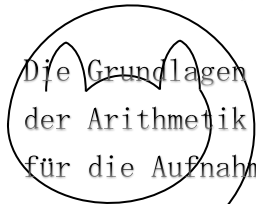
$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + \frac{1}{59049} \\ + \frac{1}{177147} + \frac{1}{531441}$$

(2) 整数 a を次々とかけあわせていくことでできる数 $a, a \times a, a \times a \times a, \dots$ を分母とする分数

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \frac{1}{a \times a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}}$$

ところ、0.3333333になりました。 a および k にあてはまる、最も小さい整数を求めなさい。

ただし、 k は2以上の整数とします。



最難関問題

分数・級数

$$(1) \textcircled{1} \frac{121}{243} \quad \textcircled{2} \frac{364}{729} \quad \textcircled{3} \frac{265720}{531441}$$

$$(2) a = 4, k = 11$$

(1)

$$\textcircled{1} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{243} = \frac{121}{243}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} = \frac{243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 1}{729} = \frac{364}{729}$$

③ ①, ②の答えは、ほぼ $\frac{1}{2}$ になっています。その仕組みを考えます。②について、

$$X = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 \text{ とすると,}$$

$$X = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$$

$$X \times 3 = \frac{3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729}{}$$

$$X \times 2 = 729 - 1$$

$$X = (729 - 1) \div 2, \text{ となるので,}$$

$$\frac{243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 1}{729} = \frac{(729 - 1) \div 2}{729} = \frac{729 - 1}{729 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{729 \times 2} \text{ です。}$$

$$\text{同様にして, } \frac{1}{2} - \frac{1}{531441 \times 2} = \frac{531441 - 1}{531441 \times 2} = \frac{265720}{531441} \text{ となります。}$$

最難関問題

$$(2) \frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \frac{1}{a \times a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}}$$

$$= \frac{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k-1 \text{ 個}} + \dots + a \times a + a + 1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}}$$

ここで、 $X = 1 + a + a \times a + \dots + \underbrace{a \times \dots \times a}_{k-1 \text{ 個}}$ とすると、

$$X = 1 + a + a \times a + \dots + \underbrace{a \times \dots \times a}_{k-1 \text{ 個}}$$

$$X \times a = \quad a + a \times a + \dots + \underbrace{a \times \dots \times a}_{k-1 \text{ 個}} + \underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}$$

$$X \times (a - 1) = \underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} - 1$$

$$X = \frac{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} - 1}{(a - 1)}$$

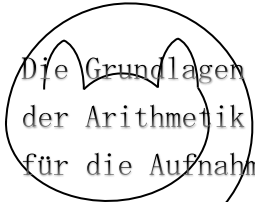
となるので、

$$\frac{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k-1 \text{ 個}} + \dots + a \times a + a + 1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}} = \frac{(\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} - 1) \div (a - 1)}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}}$$

$$= \frac{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} - 1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} \times (a - 1)} = \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}} \times (a - 1)}$$

となって、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \frac{1}{a \times a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ 個}}}$ を計算した答えはほぼ $\frac{1}{a - 1}$ になります。

0.3333333 はほぼ $\frac{1}{3}$ なので、 $a - 1 = 3$ 、 $a = 4$ です。



最難関問題

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4 \times \dots \times 4 \times 3}$ は 0.33333325 以上なので、

$\frac{1}{4 \times \dots \times 4 \times 3}$ は $\frac{1}{3} - 0.33333325 = 0.000000083333\dots$ 以下、

$\frac{1}{4 \times \dots \times 4}$ は $0.000000083333\dots \times 3 = 0.00000025 = \frac{1}{4000000}$ 以下です。

4 を何個かかけ合わせて 4000000 以上になればよいので、さがしていくと、

4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, 262144,
1048576, 4194304 で 4000000 以上になるので、 $k = 11$ です。