

最難関問題

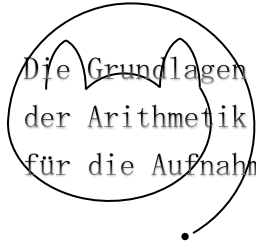
2つの単位分数への分解・3

この問題は2つの単位分数への分解・1の続きです。

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ のように分子が1の分数を単位分数といいます。 $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ のように、単位分数を2つの異なる単位分数の和に分解することを考えます。 $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ と $\frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ のように順番を入れかえただけのものは同じ式とします。

(1) $\frac{1}{2023}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式に現れる単位分数のうち、 $\frac{1}{2100}$ より大きいものをすべて答えなさい。

(2) $\frac{1}{2023}$ を2つの異なる単位分数の和に分解する式のうち、分母が3の倍数である単位分数が現れるものをすべて答えなさい。



最難関問題

2つの単位分数への分解・3

$$(1) \frac{1}{2024}, \frac{1}{2030}, \frac{1}{2040}, \frac{1}{2072}$$

$$(2) \frac{1}{2040} + \frac{1}{242760}, \frac{1}{2142} + \frac{1}{36414}, \frac{1}{2856} + \frac{1}{6936}$$

(1) (\square, Δ) がどちらも2023の約数で、互いに素であるときに、

$\frac{\square}{2023 \times (\square + \Delta)} + \frac{\Delta}{2023 \times (\square + \Delta)}$ を約分すると、 $\frac{1}{2023}$ を2つの単位分数の和に分解する式になります。単位分数への約分は、

$$\frac{\square}{2023 \times (\square + \Delta)} = \frac{1}{2023 \times \frac{\square + \Delta}{\square}}$$

$$\frac{\Delta}{2023 \times (\square + \Delta)} = \frac{1}{2023 \times \frac{\square + \Delta}{\Delta}}, \text{ となるので、単位分数の分母は}$$

$2023 \times \frac{\square + \Delta}{\square}$ と $2023 \times \frac{\square + \Delta}{\Delta}$ です。

2023を素因数分解すると、 $7 \times 17 \times 17$ で、2023の約数は1, 7, 17, $7 \times 17 = 119$, $17 \times 17 = 289$, 2023の6個です。これらのうちで互いに素である組は、 $(7, 1)$, $(17, 1)$, $(119, 1)$, $(289, 1)$, $(2023, 1)$, $(17, 7)$, $(289, 7)$ の7組です。それぞれの場合に、単位分数の分母が2023の何倍になるかをまとめると、次のようになります。

$$(7, 1) \dots \frac{8}{7}, \frac{8}{1}$$

$$(17, 1) \dots \frac{18}{17}, \frac{18}{1}$$

$$(119, 1) \dots \frac{120}{119}, \frac{120}{1}$$

$$(289, 1) \dots \frac{290}{289}, \frac{290}{1}$$

$$(2023, 1) \dots \frac{2024}{2023}, \frac{2024}{1}$$

$$(17, 7) \dots \frac{24}{17}, \frac{24}{7}$$

$$(289, 7) \dots \frac{296}{289}, \frac{296}{7}$$

最難関問題

以上のうちで2023との積が2100以下であるものは、

$$2023 \times \frac{2024}{2023} = 2024, \quad 2023 \times \frac{290}{289} = 2030,$$

$$2023 \times \frac{120}{119} = 2040, \quad 2023 \times \frac{296}{289} = 2072, \text{ なので,}$$

$$\frac{1}{2024}, \frac{1}{2030}, \frac{1}{2040}, \frac{1}{2072} \text{ が答えとなります。}$$

(2) 2023自身は3の倍数ではないので、分子が3の倍数である以下の3つの場合に条件を満たします。

$$(17, 1) \dots \frac{18}{17}, \frac{18}{1} \quad (119, 1) \dots \frac{120}{119}, \frac{120}{1} \quad (17, 7) \dots \frac{24}{17}, \frac{24}{7}$$

$$2023 \times \frac{18}{17} = 2142, \quad 2023 \times \frac{18}{1} = 36414 \text{ より, } \frac{1}{2142} + \frac{1}{36414}$$

$$2023 \times \frac{120}{119} = 2040, \quad 2023 \times \frac{120}{1} = 242760 \text{ より, } \frac{1}{2040} + \frac{1}{242760}$$

$$2023 \times \frac{24}{17} = 2856, \quad 2023 \times \frac{24}{7} = 6936 \text{ より, } \frac{1}{2856} + \frac{1}{6936}$$