

平均点と2位の点（後編）

何人かの生徒がテストを受けたところ、全員が異なる点数を取り、2位の生徒は平均点以下の点数になりました。テストの点数は整数です。このときに、2位の生徒の点数は最も高くても何点かを考えます。

例えば、7人の生徒が100点満点のテストを受けると、生徒の点数と平均点は次のようになって、85点が答えとなります。

1 位	2 位	3 位	4 位	5 位	6 位	7 位	平均点
100 点	99 点	98 点	97 点	96 点	95 点	94 点	97 点
...	...	...	...	...	...	...	...
100 点	86 点	85 点	84 点	83 点	82 点	81 点	85.8...点
100 点	85 点	84 点	83 点	82 点	81 点	80 点	85 点

太郎君は、上の例において2位の生徒の点数が平均点と等しくなったのは偶然だろうか、と考えました。「3位以下の点数は2位から1点ずつ小さくなっていくとすべきなので、2位の点数を□点とすると、次のようになるな。」

1 位	2 位	3 位	4 位	5 位	6 位	7 位
100 点	□点	□－1 点	□－2 点	□－3 点	□－4 点	□－5 点

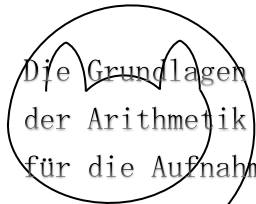
「□点が平均点以下であるということは、□点の7倍は、7人の合計点以下になるはずだから…。」

太郎君の考えを参考に、次の問いに答えなさい。

(ア) 平均点と2位の点数との一致は必ず起こるのかそうでないのか、正しい方を答えなさい。

(イ) x 点満点のテストを y 人が受験したときの、2位の生徒の最も高い点数を、 x と y を含む式で表しなさい。

(ウ) 1000点満点のテストで答えが97点となる場合、テストを受けた生徒の人数は何人ですか。



平均点と2位の点（後編）

（ア）必ず一致する

（イ） $x - (y-1) \times (y-2) \div 2$, $x - (1+2+3+\cdots+y-2)$, など

（ウ）44人

太郎君の例に即して考えると，次のようになります。

1 位	2 位	3 位	4 位	5 位	6 位	7 位
100 点	□点	□-1 点	□-2 点	□-3 点	□-4 点	□-5 点

$\square \times 7 \leq 1000 + \square \times 6 - (1+2+3+4+5)$ より，

$\square \times 1 \leq 1000 - (1+2+3+4+5)$ ，

$\square \times 1 \leq 85$ となるので，□は最大で85

一般化すれば，

$\square \times y \leq x + \square \times (y-1) - (1+2+3+\cdots+(y-2))$ ，

$\square \leq x - (1+2+3+\cdots+(y-2))$ ，

$\square \leq x - (y-1) \times (y-2) \div 2$ ，

となります。満点から受験者数マイナス2番目の三角数を引いた点数は整数なので，これがそのまま2位の最高点となります。よって， $\square = x - (y-1) \times (y-2) \div 2$ です。

$97 = 1000 - 903$ で，

$(y-1) \times (y-2) \div 2 = 903$ ，

$(y-1) \times (y-2) = 1806$ ，となるので， $43 \times 42 = 1806$ より， $y = 44$ です。