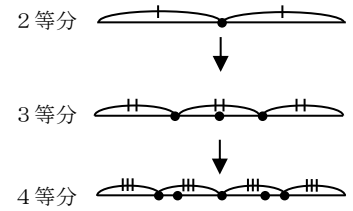


最難関問題

レーザー光線と三角柱・導入問題

1本の線を何等分かする点をつけます。例えば、2等分する点、3等分する点、4等分する点をつけると、右図のように点が5個つき、線は6本に分かれます

では、10等分する点、12等分する点、15等分する点をつけると、線は何本に分かれますか。



最難関問題

レーザー光線と三角柱

以下の問いに答えなさい。

- (1) 図1は、1辺の長さが1 cmの小正三角形を25個ならべて1辺の長さが5 cmの正三角形にしたものです。直線PQは、小正三角形を何個通過しますか。
- (2) 図2は、1辺の長さが1 cmの小正三角形を(1)と同じ方法でならべて1辺の長さが16 cmの正三角形にしたものです。直線PQは、小正三角形を何個通過しますか。
- (3) 図3のようなすべての辺の長さが1 cmの小三角柱を、底面の正三角形を(1)と同じ方法で並べることで、図4のような高さ1 cmの三角柱を作りました。さらに、図4の三角柱をつみあげて、図5の高さ15 cmの三角柱を作りました。図5の三角柱について、次の問いに答えなさい。
- ① 直線PQは、何個の小三角柱を通過しますか。
 - ② 直線PQが通過した小三角柱だけからなる立体の表面積を求めなさい。ただし、1辺の長さが1 cmの正三角形の面積は 0.43 cm^2 とします。

図1

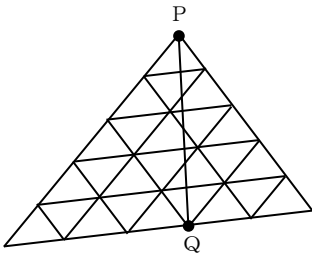


図2

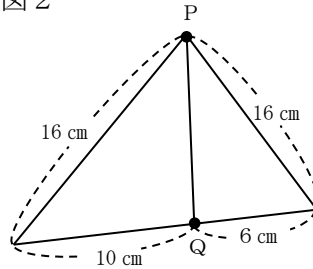


図3

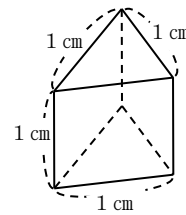


図4

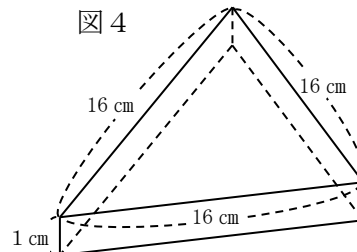
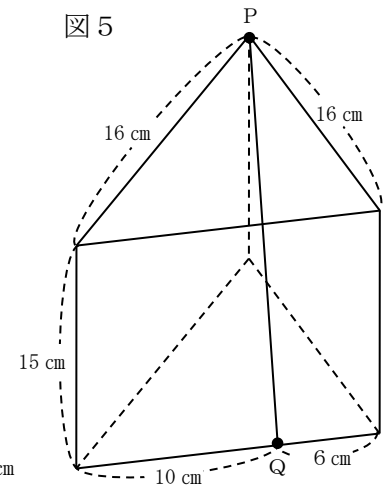


図5



最難関問題

レーザー光線と三角柱・導入問題 28本

分母が10, 12, 15の真分数の列を考えます。

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \dots, \frac{14}{15}$$

3つの分数列を比べて、重複するものを除けば点の個数を求めることができます。

10と12の最大公約数は2ですから、約分すると $\frac{1}{2}$ になる点、つまりは $\frac{5}{10}$ と $\frac{6}{12}$ で点が重なります。

10と15の最大公約数は5ですから、約分すると $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ になる点が重なります。

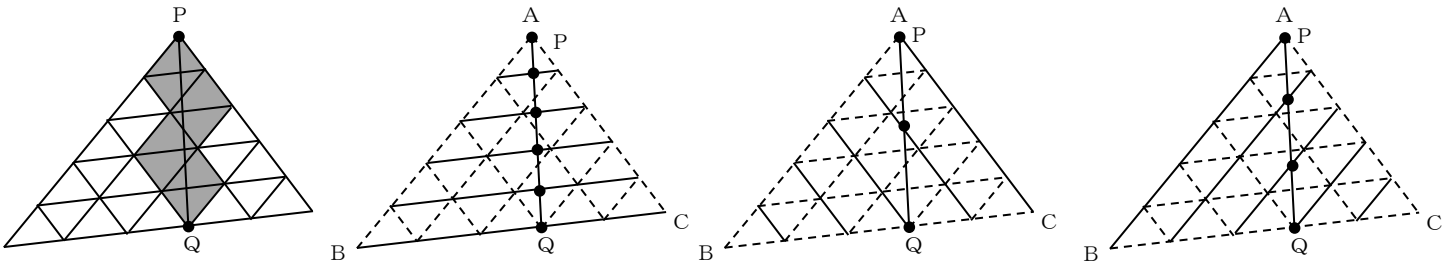
12と15の最大公約数は3ですから、約分すると $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ になる点が重なります。

点の重なりが7か所あるので、点の数は $9 + 11 + 14 - 7 = 27$ (個)です。よって、線は28本に分かれます。

最難関問題

レーザー光線と三角柱 (1) 8個 (2) 28個 (3) ① 36個 ② 90.08 cm²

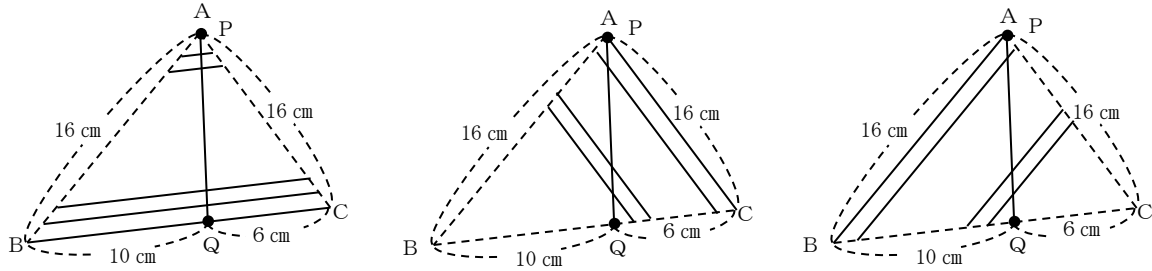
(1) 数えれば8個であることはすぐにわかりますが、(2)以降を解くために、観察をしておきましょう。
直線PQは、辺BCと平行な辺によって5等分されます。同様に、辺ACと平行な辺によって2等分、
辺ABと平行な辺によって3等分されます。



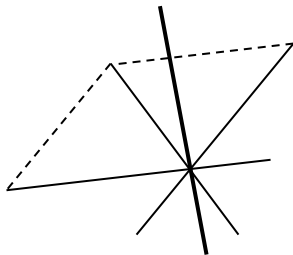
ここで、わかりやすさのために点PからQへ1秒間でレーザービームが届くと考えましょう。途中でBCと平行な辺と交わるのは $\frac{1}{5}$ 秒後、 $\frac{2}{5}$ 秒後、 $\frac{3}{5}$ 秒後、 $\frac{4}{5}$ 秒後の4回です。同様に、ACと平行な辺と交わるのは $\frac{1}{2}$ 秒後の1回、ABと平行な辺と交わるのは $\frac{1}{3}$ 秒後、 $\frac{2}{3}$ 秒後の2回です。あわせて、 $4 + 1 + 2 = 7$ (回) 辺と交わっています。辺と交わるごとに新しい小正三角形を通過するので、点Pが頂点となっている最初の小正三角形を含めて、 $7 + 1 = 8$ (個) の小正三角形を通過します。

最難関問題

(2) 直線 PQ は、辺 BC と平行な辺によって 16 等分、辺 AC と平行な辺によって 6 等分、辺 AB と平行な辺によって 10 等分されるので、 $\frac{1}{16} \sim \frac{15}{16}$ 秒後、 $\frac{1}{6} \sim \frac{5}{6}$ 秒後、 $\frac{1}{10} \sim \frac{9}{10}$ 秒後に辺と交わります。

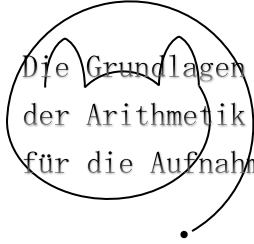


ここで考えておきたいのは、2 本以上の辺と同時に交わることはないか、ということです。実際、 $\frac{8}{16} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ですから、1 回だけ 3 本の辺と交わります。小正三角形の並び方を考えれば、2 本以上の辺と交わる = 3 本の辺と交わる、であることがわかります。



よって、辺と交わる回数は、 $15 + 5 + 9 - 2 = 27$ (回) ですから、 $27 + 1 = 28$ (個) の正三角形を通過します。

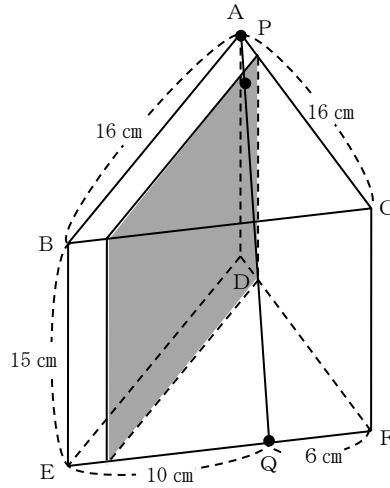
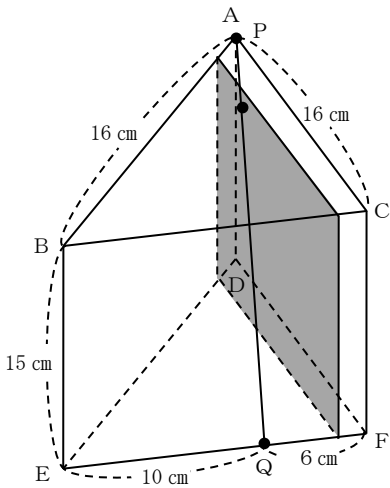
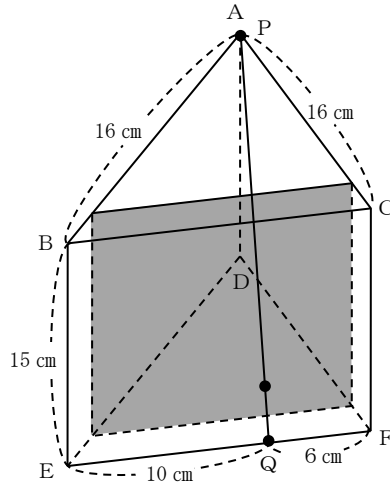
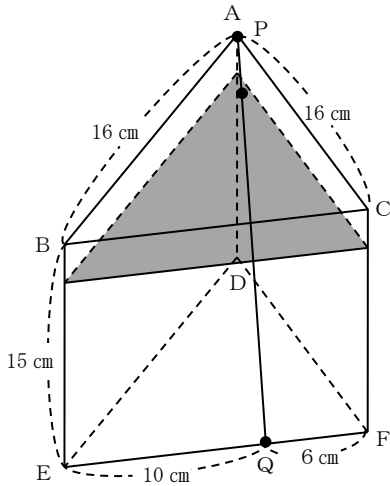
別解 16, 6, 10 を最大公約数の 2 で割ると、8, 3, 5 となります。8 cm, 3 cm, 5 cm の条件で同様に考えると、 $7 + 2 + 4 = 13$ (回) 辺と交わり、 $13 + 1 = 14$ (個) の小正三角形を通過するので、 $14 \times 2 = 28$ (個) です。



最難関問題

(3)

① 図のように、三角柱の4方向の面とそれぞれ何回交わるかを考えます。



面ABCと平行な面とは、 $\frac{1}{15} \sim \frac{14}{15}$ 秒後の14回交わります。面BCFEと平行な面とは、 $\frac{1}{16} \sim \frac{15}{16}$ 秒後の15回交わります。面ACFDと平行な面とは、 $\frac{1}{6} \sim \frac{5}{6}$ 秒後の5回交わります。面ABEDと平行な面とは、 $\frac{1}{10} \sim \frac{9}{10}$ 秒後の9回交わります。

最難関問題

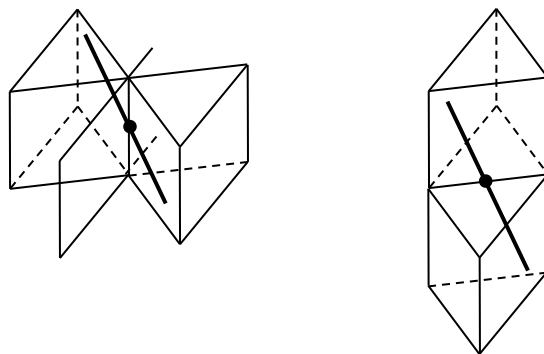
同時に面を通過するかどうかは、4つの分数列、 $\frac{1}{15} \sim \frac{14}{15}$, $\frac{1}{16} \sim \frac{15}{16}$, $\frac{1}{6} \sim \frac{5}{6}$, $\frac{1}{10} \sim \frac{9}{10}$ に重複する分数があるかどうかを考えることできめることができます。16, 6, 10の最大公約数が2であることから、 $\frac{1}{2}$ 秒後に3つの四角形の面を同時に通過します。15, 6の最大公約数が3であることから、 $\frac{1}{3}$ 秒後と $\frac{2}{3}$ 秒後、15, 10の最大公約数が5であることから、 $\frac{1}{5}$ 秒後、 $\frac{2}{5}$ 秒後、 $\frac{3}{5}$ 秒後、 $\frac{4}{5}$ 秒後に三角形と四角形の2面を同時に通過します。

よって、 $14 + 15 + 5 + 9 - (2 \times 1 + 1 \times 6) = 35$ (回) 三角柱の面か辺を通過するので、 $35 + 1 = 36$ (個) の三角柱を通過します。

② 小三角柱1個につき、正三角形の面は2面、正方形の面は3面ありますから、36個の小三角柱では、正三角形の面は $2 \times 36 = 72$ (面)、正方形の面は $3 \times 36 = 108$ (面) あります。

36個の小三角柱は、どのように組み合わせられているのでしょうか。直線PとQが小三角柱の面を通過する場合、2個の小三角柱の面どうしがくっつきますから、1回につき2面分表面積が小さくなります。直線PとQが小三角柱の辺や頂点を通過する場合は2個の小三角柱は辺や点で接するのみですから、表面積は小さくなりません。

$\frac{1}{2}$ 秒後の1回3つの四角形の面を同時に通過するときと、 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} \sim \frac{4}{5}$ 秒後の6回三角形と四角形の2面を同時に通過するときは、それぞれ図のように、小三角柱の辺を通過します。



このことから、正方形の面を通過する回数は、 $15 + 5 + 9 - (2 \times 1 + 1 \times 6) = 21$ (回) であり、正三角形の面を通過する回数は、 $14 - 1 \times 6 = 8$ (回) であることがわかります。よって、立体の表面は正方形が $108 - 2 \times 21 = 66$ (面)、正三角形が $72 - 8 \times 2 = 56$ (面) から成ります。

以上より、 $1 \times 66 + 0.43 \times 56 = 90.08$ (cm²) です。