

最難関問題

約数・逆数・単位分数

ある整数の約数を小さい順に並べて、連続するいくつかの約数の逆数の和を求めます。たとえば、12の約数を小さい順に並べると、1, 2, 3, 4, 6, 12となります。このとき、

$$1, 2, 3 \text{ の逆数の和は, } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6},$$

$$2, 3, 4, 6 \text{ の逆数の和は, } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{4}, \text{ となります。}$$

2けたの整数Aについて連続するいくつかの約数の逆数の和を求めたところ、 $\frac{2}{9}$ になりました。このような整数Aとして考えられるものはいくつもありますが、そのうちの2つを答えなさい。

最難関問題

約数・逆数・単位分数 54, 72, 90, など

分子が1の分数を単位分数といいます。1も $\frac{1}{1}$ という単位分数と考えると、整数の逆数はすべて単位分数なので、和が $\frac{2}{9}$ になるような単位分数をさがします。ただし、それらの単位分数は整数Aの連続するいくつかの約数の逆数になっていなければなりません。 $\frac{2}{9}$ を分母を変えずに分数の和で表すと、 $\frac{2}{9} = \frac{1+1}{9}$ となって明らかに条件を満たしません。よって、 $\frac{2}{9}$ の分子と分母を整数倍していきます。

○ $\frac{4}{18} = \frac{3+1}{18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ では、もとの約数は6と18です。6や18が整数Aの約数であるならば、9もAの約数なので、連続した約数になっていません。

○ $\frac{6}{27}$ はそもそも単位分数の和に分解できません。

○ $\frac{8}{36} = \frac{6+2}{36}$ は、6と2がどちらも2で割り切れるため、約分をすると $\frac{3+1}{18}$ になります。また、

$\frac{8}{36} = \frac{4+3+1}{36} = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$ では、もとの約数は9, 12, 36です。これらが整数Aの約数であるならば、18もAの約数なので、連続した約数になっていません。

○ $\frac{10}{45} = \frac{9+1}{45} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$ では、もとの約数は5と45です。5や45が整数Aの約数であるならば、9や15もAの約数なので、連続した約数になっていません。

○ $\frac{12}{54} = \frac{9+3}{54}$ や $\frac{12}{54} = \frac{9+2+1}{54}$ も、上と同様に条件を満たしません。

$\frac{12}{54} = \frac{6+3+2+1}{54} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$ では、もとの約数は9, 18, 27, 54です。これらは、例えば54の連続した約数です。よって、54は整数Aの条件を満たします。なお、2けたを超えてしまいますが、 $54 \times 3 = 168$ などの連続した約数にもなっています。

○ $\frac{14}{63} = \frac{9+3+1}{63}$ は、上と同様に条件を満たしません。

最難関問題

○ $\frac{16}{72}$ は色々な単位分数の和に分解できますが、

$\frac{16}{72} = \frac{6+4+3+2+1}{72} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}$ では、もとの約数は 12, 18, 24, 36, 72 です。これらは、例えば 72 の連続した約数です。よって、72 は整数 A の条件を満たします。

同様の方法で、 $\frac{20}{90} = \frac{9+6+5}{90} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$ から、もとの約数の 10, 15, 18 が 90 などの連続した約数になっていることも導くことができます。